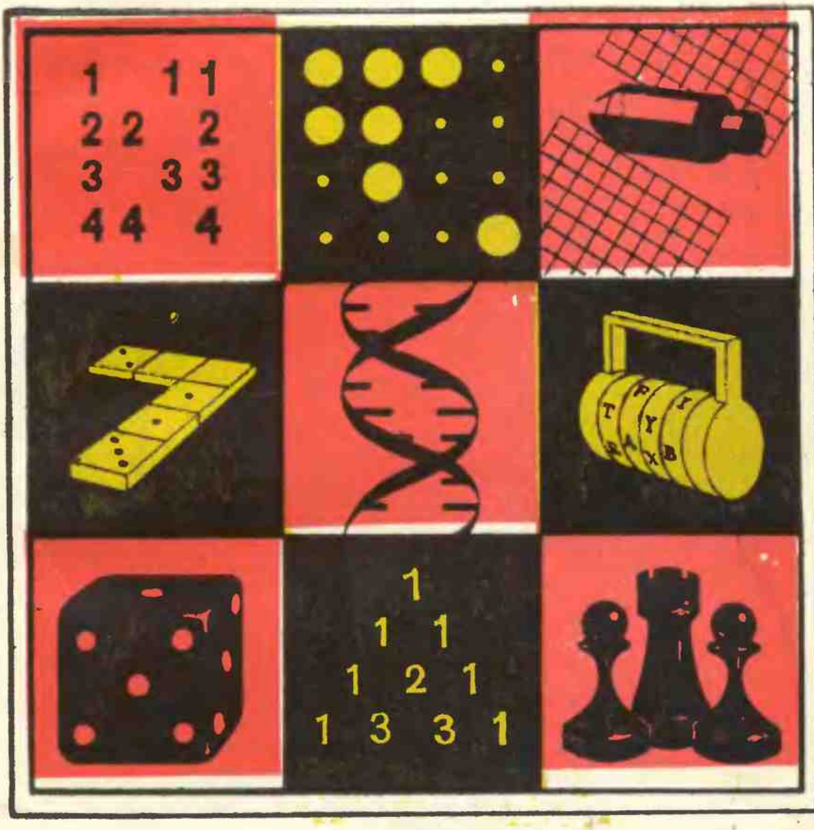
Н. Я. ВИЛЕНКИН

ПОПУЛЯРНАЯ КОМБИНАТОРИКА



ИЗДАТЕЛЬСТВО НАУКА

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

Научно-популярная серия

Н. Я. ВИЛЕНКИН

ПОПУЛЯРНАЯ КОМБИНАТОРИКА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

Москва 1975

Комбинаторика — важный раздел математики, знание которого необходимо представителям самых разных специальностей. С комбинаторными задачами приходится иметь дело физикам, химикам, биологам, лингвистам, специалистам по кодам и др. Комбинаторные методы лежат в основе решения многих задач теории вероятностей и ее приложений. В книге в популярной форме рассказывается об интересных комбинаторных задачах и методах их решения.

$\text{В}\ \frac{20202-011}{054(02)-74}$ 274НП

ПРЕДИСЛОВИЕ

Комбинаторика — ветвь математики, изучающая комбинации и перестановки предметов,— возникла в XVII в. Долгое время казалось, что комбинаторика лежит вне основного русла развития математики и ее приложений. Положение дел резко изменилось после появления быстродействующих вычислительных машин и связанного с этим расцвета конечной математики. Сейчас комбинаторные методы применяются в теории случайных процессов, статистике, математическом программировании, вычислительной математике, планировании экспериментов и т. д. В математике комбинаторика используется при изучении конечных геометрий, комбинаторной геометрии, теории представлений групп, неассоциативных алгебр и т. д.

На русском языке есть несколько книг, посвященных комбинаторике: «Комбинаторика» М. Холла (М., 1970), «Введение в комбинаторный анализ» Дж. Риордана (М., 1963), «Прикладная комбинаторная математика» (М., 1968). Отдельным вопросам комбинаторики посвящены книги А. А. Зыкова «Теория конечных графов» (Новосибирск, 1969), Ф. Харари «Теория графов» (М., 1973), Т. Саати «Целочисленные методы оптимизации и связанные с ними экстремальные проблемы» (М., 1973) и др. Однако все эти книги предъявляют высокие требования к математической подготовке читателя. Популярные же книги обычно охватывают лишь немногие начальные сведения.

В 1969 г. автор сделал попытку популярно изложить некоторые вопросы комбинаторики («Комбинаторика». М., 1969). В основном книга была посвящена вопросам перечислений. Такие важные разделы, как теоремы о различных и общих представителях, теорема Рамсея, метод Пойя перечисления орбит и т. д., остались вне рамок книги. Поэтому возникла необходимость написать новую книгу, в которой наряду с вопросами перечислительной комбинаторики освещались бы и иные стороны этой науки. Такая книга и предлагается вниманию читателя.

Она состоит из шести глав. В главе I рассказывается кратко об истории комбинаторики и некоторых наиболее важных приложений комбинаторных методов (к расшифровке древних письменностей, разгадке генетического кода, составлению периодической таблицы элементов и т. д.). Глава II посвящена кругу вопросов, связанных с возможным и невозможным в комбинаторике: теореме Рамсея, выбору представителей и т. д. Здесь же рассказано о некоторых понятиях теории графов. Классическая комбинаторика, т. е. размещения, сочетания и перестановки, изложена в главе III. Здесь применяется язык теории множеств, который, однако, используется лишь в объеме, изучаемом сейчас в средней школе (вообще вся книга написана с таким расчетом, чтобы ее могли понимать школьники старших классов). В главе IV общие понятия применяются к комбинаторным задачам на разбиения и раскладки, а в главе V — к комбинаторным задачам с ограничениями. Наконец, глава VI посвящена методам Пойя в теории орбит.

Автор старался сохранить неформальный стиль изложения предыдущей книги. Большинство понятий вводится в связи с конкретными задачами. Однако эти задачи подобраны так, чтобы они оставляли ясной математическую суть дела. Почти весь материал, заимствованный из книги «Комбинаторика», подвергся полной переработке, для некоторых вопросов найдены новые, более простые решения. Задачи распределены по главам и в значительной степени изменены.

Глава I

ИЗ ИСТОРИИ КОМБИНАТОРИКИ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЙ

Дела давно минувших дней...

Говорят, что некто усомнился в правах Ньютона на открытие закона всемирного тяготения, утверждая, что падение яблок на землю наблюдалось испокон веков. В этой шутке есть доля истины — до того, как та или иная область знания формируется в особую науку, она сначала проходит длительный период накопления эмпирического материала, потом развивается в недрах другой, более общей науки и лишь затем выделяется в самостоятельную ветвь. А если ей повезет, то из ветви она становится большим, шумящим лесом со своими земляничными полянами и запутанными тропами.

Не составляет исключения и история науки про общие законы комбинирования и образования различных конфигураций объектов, получившей название *комбинаторики*. С задачами, в которых приходится выбирать те или иные предметы, располагать их в определенном порядке и отыскивать среди разных расположений наилучшие, люди столкнулись еще в доисторическую эпоху, выбирая наилучшие расположения охотников во время охоты, воинов во время битвы, инструментов во время работы. Определенным образом располагались украшения на одежде, узоры на керамике, перья в оперении стрелы. По мере усложнения производственных и общественных отношений все шире приходилось пользоваться общими понятиями о порядке, иерархии, группировании. В том же направлении действовало развитие ремесел и торговли.

Комбинаторные навыки оказались полезными и в часы досуга. Нельзя точно сказать, когда наряду с состязаниями в беге, метании диска, прыжках появились игры, требовавшие в первую очередь умения рассчитывать, составлять планы и опровергать планы противника. О таких играх английский поэт Уордсворт писал:

Не нужно нам владеть клинком,
Не ищем славы громкой.
Тот побеждает, кто знаком
С искусством мыслить тонким.

Среди предметов, положенных в пирамиду, где 35 веков тому назад был похоронен египетский фараон Тутанхамон, нашли разграфленную доску с тремя горизонталями и 10 вертикалями и фигурки для древней игры «сенет», правила которой мы, вероятно, никогда не узнаем. Позже появились нарды, шашки и шахматы, а также их различные варианты (китайские и японские шахматы, японские облавные шашки «го» и т. д.). В каждой из этих игр приходилось рассматривать различные сочетания передвигаемых фигур и выигрывал тот, кто их лучше изучил, знал выигрывающие комбинации и умел избегать проигрывающих.

Разумеется, в этот период еще не было речи об особой науке про решение комбинаторных задач, с каждой такой задачей приходилось справляться особо.

Таинственная черепаха

Первое упоминание о вопросах, близких к комбинаторным, встречается в китайских рукописях, относящихся к XII—XIII вв. до н. э. (точно датировать эти рукописи невозможно, поскольку в 213 г. до н. э. император Цин Шихуан приказал сжечь все книги, так что до нас дошли лишь сделанные позднее копии). В этих книгах писалось, что все в мире является сочетанием двух начал — муж-

☰	☱	☲	☳	☴	☵	☶	☷
k'ien небо	tui облака	li огонь	chőn гроза	sűn ветер	k'an вода	kőn горы	k'un земля
7	6	5	4	3	2	1	0
Юг	Юго-Восток	Восток	Северо-Восток	Юго-Запад	Запад	Северо-Запад	Север

Рис. 1.

ского и женского, которое авторы обозначали символами —— и — —. В рукописи «Же-ким» («Книга перестановок») показаны различные соединения этих знаков по два и по три (рис. 1). Восемь рисунков из трех рядов символов изображали землю, горы, воду, ветер, грозу, огонь, облака и небо (некоторые рисунки имели и иные значения). Неудивительно поэтому, что сумма первых 8 натуральных чисел (т. е. число 36) воплощала в представлениях древних китайцев весь мир.

По мере углублений знаний понадобилось выразить и другие элементы мироздания с помощью тех же знаков —— и — —. Были составлены 64 фигуры, содержавшие уже пять рядов черточек. Надо полагать, что автор рукописи «Же-ким» заметил удвоение числа рисунков при добавлении одного ряда символов. Это можно рассматривать как первый общий результат комбинаторики.

В рукописи «Же-ким» есть и более сложные рисунки. Как утверждает приводимое в ней предание, император Ию, живший примерно 4000 лет тому назад, увидел на берегу реки священную черепаху, на панцире которой был изображен рисунок из белых и черных кружков (рис. 2). Если заменить каждую фигуру соответствующим

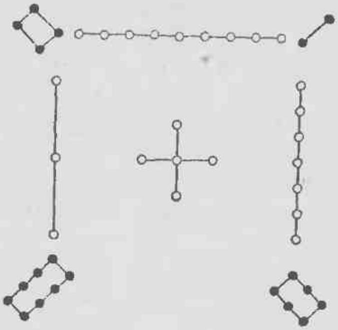


Рис. 2.

числом, возникнет такая таблица:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

При сложении чисел в каждой строке, столбце и диагонали получается одна и та же сумма 15. При том мистическом толковании, которое придавали числам древние китайцы, открытие таблицы со столь чудесными свойствами произвело неизгладимое впечатление. Рис. 2 назвали «ло-шу», стали считать его магическим символом и употреблять при заклинаниях. Поэтому сейчас любую квадратную таблицу чисел с одинаковыми суммами по каждой строке, столбце и диагонали называют *магическим квадратом*.

Комбинаторика в Древней Греции

Говорить с полной уверенностью об уровне знаний древних греков в области комбинаторики затруднительно, поскольку до нас дошло далеко не все из их научного наследия. В 391 г. н. э. толпа монахов разрушила центр языческой науки — александрийский Музеум — и сожгла большую часть хранившейся в нем библиотеки, насчитывавшей многие тысячи томов. Остатки библиотеки разрушались в течение еще трех веков, а в 638 г. н. э. она окончательно погибла при взятии Александрии войсками арабского халифа Омара Большинство научных книг безвозвратно погибло, и мы можем лишь догадываться об их содержании по кратким пересказам и намекам в сохранившихся рукописях.

По этим намекам можно все же судить, что определенные представления о комбинаторике у греческих ученых были Философ Ксенократ, живший в IV в. до н. э., подсчитывал число слогов. В III в. до н. э. стоик Хрисипп полагал, что число утверждений, получаемых из 10 аксиом, превышает миллион По мнению же Гиппарха, из утверждающих аксиом можно составить 103 049 сочетаний, а добавив к ним отрицающие, 310 952. Мы не знаем, какой именно смысл придавали эти философы своим утверждениям и как они получали свои результаты — приводимые Гиппархом числа слишком точны, чтобы считать их результатом грубой оценки, и в то же время не поддаются разумному истолкованию. По-видимому, у греческих ученых были какие-то не дошедшие до нас правила комбинаторных расчетов, скорее всего ложные.

Конкретные комбинаторные задачи, касавшиеся перечисления небольших групп предметов, греки решали без ошибок. Аристотель описал без пропусков все виды правильных трехчленных силлогизмов, а его ученик Аристоксен из Тарента перечислил различные комбинации длинных и коротких слогов в стихотворных размерах. Живший в IV в. н. э. математик Папп рассматривал число пар и троек, которые можно получить из трех элементов, допуская их повторения.

Большое внимание греческие ученые уделяли вопросам, пограничным между комбинаторикой и теорией чисел. Еще в VI в. до н. э. в школе философа-идеалиста и математика Пифагора возникло убеждение, что миром

Рис. 3.

правят числа, а вещи только отражение чисел (возможно, что эти идеи возникли у Пифагора под влиянием вавилонской культуры и восходят к еще более древним взглядам шумеров). Поэтому, чтобы познать мир, пифагорейцы начали изучать свойства натуральных чисел. Их исследования о четных и нечетных числах, делимости чисел, простых и составных числах положили основу теории чисел (в науке бывает, что неверные исходные установки дают толчок к полезным исследованиям). Как и китайцы, пифагорейцы придавали особое значение числу 36 — оно было для них не только суммой первых 4 четных и первых 4 нечетных чисел, но и суммой первых трех кубов: $36 = 1^3 + 2^3 + 3^3$. Символом совершенства пифагорейцы считали *совершенные числа*, равные сумме своих делителей, например, $6 = 1 + 2 + 3$, $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$, а символом дружбы — *дружественные числа*, каждое из которых равно сумме делителей другого числа (например, 220 и 284). Отыскание таких чисел требовало комбинаторного искусства.

В школе Пифагора была доказана известная теорема о сторонах прямоугольного треугольника. Это вызвало интерес к представлению чисел в виде суммы двух квадратов, к квадратным числам 1, 4, 9, 16 и т. д. Квадраты натуральных чисел изображались при этом геометрически (рис. 3). Но пифагорейцы рассматривали и иные конфигурации точек, такие, как изображенные на рис. 4 и 5. Каждый треугольник на рис. 4 получается из предыдущего увеличением длины его стороны на 1. Подсчитывая число точек в каждом треугольнике, получаем последовательность треугольных чисел 1, 3, 6, 10... Эти числа можно получить, последовательно складывая натуральные числа: 1, $1+2$, $1+2+3$, $1+2+3+4$ и т. д. Точно так же шестиугольники на рис. 5 приводят к последовательности шестиугольных чисел 1, 6, 15... получаемой при последовательном суммировании арифметической прогрессии $1+5+$

Рис. 4.

$+9+\ldots$ В дальнейшем такие суммы удалось выразить с помощью биномиальных коэффициентов C_n^k, играющих важную роль в комбинаторике.

Переход от плоскости к пространству дал возможность строить еще более сложные числа. Например, из треугольников можно составить пирамиды. Подсчитывая число точек в таких пирамидах, пришли к пирамидальным числам 1, 4, 10, 20, ..., которые были суммами ряда $1+3+6+$

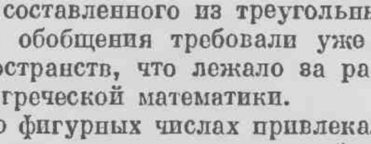


Рис. 5.

$+10+\ldots$, составленного из треугольных чисел. Однако дальнейшие обобщения требовали уже введения многомерных пространств, что лежало за рамками возможностей древнегреческой математики.

Учение о фигурных числах привлекало к себе математиков на протяжении многих столетий. Ими много занимался живший в XVII в. французский ученый Пьер Ферма, который доказал, например, что любое натуральное число есть или треугольное или сумма 2 или 3 треугольных чисел, квадратное или сумма 2, 3 или 4 квадратов, пятиугольное или сумма 2, 3, 4 или 5 пятиугольных и т. д. Как и многие другие полученные им результаты, он лишь сформулировал это утверждение в письме к Блэзу Паскалю (юрист по основной профессии, Ферма занимался математикой лишь в часы досуга). Частные случаи этой теоремы доказали Эйлер и Лагранж, а общее доказательство было дано в 1815 г. французским математиком О. Коши.

Наряду с комбинаторикой чисел греческие ученые занимались и отдельными вопросами геометрической комбинаторики — правильными и полуправильными многогранниками, составлением фигур из 14 частей особым образом разрезанного квадрата и т. д. Последнему вопросу была посвящена работа Архимеда «Стомахион».

Мистики, астрологи, каббалисты

Со II в. до н. э. начинается сначала медленный, а потом все более быстрый упадок науки в эллинистических странах, отражавший общий кризис рабовладельческого общества. Многие работы того времени были посвящены мистическим толкованиям чисел в духе пифагорейцев (например, «Арифметическая теология» неопифагорейца Никомаха, жившего в I—II вв. н.э.). Большое развитие получили различные числовые суеверия и толкования, связанные с заменой букв соответствующими числами (греки обозначали числа с помощью букв — первые 9 букв алфавита обозначали числа от 1 до 9, следующие за ними — от 10 до 90, а последние 9 букв — от 100 до 900). Были «ученые», называвшиеся каббалистами, которые подвергали такому «анализу» слова Библии и других священных книг и делали на основе своих изысканий пророчества о будущем мира

Во время богословских споров, начавшихся после победы христианства, старались получить из имен еретиков число 666 — ведь по Апокалипсису это было «звериное число», символ антихриста. Такие попытки предпринимались и позднее — лютеране пытались вывести число 666 из имени римского папы, а католики — из имени Мартина Лютера. В романе «Война и мир» Л. Н. Толстой описывает, как Пьер Безухов пытался вывести это число из имени Наполеона Бонапарта. Такого рода исследования при всей своей бесплодности давали толчок к дальнейшему развитию комбинаторики.

Наряду с каббалистами и мистиками комбинаторикой в эти темные века упадка науки занимались астрологи.

Их интересовал вопрос о движении планет и их «влиянии» на судьбы людей. Особое значение придавали они сочетаниям планет — встречам различных планет в одном знаке Зодиака. Астролог бен Эзра в 1140 г. рассчитал количество сочетаний семи планет по две, по три и т. д. Он знал, что число сочетаний планет по две равно числу их сочетаний по пять, а число сочетаний по три равно числу сочетаний по четыре. Если обозначить эти утверждения в современных символах, то получатся равенства $C_7^2 = C_7^5$ и $C_7^3 = C_7^4$ (через C_n^k обозначают число сочетаний из n различных предметов по k).

В окончательном виде формулу для числа сочетаний получил живший в начале XIV в. математик Леви бен Гершон, доказавший, что

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\ldots k}. \quad (1)$$

Однако его работа, написанная на малодоступном большинству ученых древнееврейском языке, осталась почти незамеченной — вновь формулу (1) вывел в начале XVII в. французский математик П. Эригон.

Комбинаторика и схоластики

Своеобразной комбинаторикой занимались и логики. Продолжая исследования Аристотеля, они классифицировали понятия и логические рассуждения. В III в. н. э. сириец Порфирий для классификации понятий составил особую схему, получившую название «древа Порфирия». На вершине этого древа помещалось самое широкое по объему понятие, узлы древа соответствовали различным расчленениям понятия, а линии между узлами отражали подчиненность понятий друг другу. Подобные деревья сейчас широко применяются в приложениях комбинаторики к самым разным вопросам.

Один из основателей медицины, Гален, во II в. н. э. занимался классификацией силлогизмов, состоящих из четырех частей. Римский философ и математик Боэций (V—VI вв. н. э.) нашел число пар, которые можно составить из пяти категорий модальности, беря их как в утвердительной, так и в отрицательной форме и ставя либо на место условия, либо на место следствия. Он классифицировал также условные силлогизмы.

Большое внимание классификации видов суждений уделяла схоластическая наука (вообще в схоластике причудливо переплетались богословские «изыскания» с исследованием проблем, примыкающих к комбинаторике, математической логике, теории множеств и другим современным областям математики — большими знатоками схоластических исследований были основатели теории множеств Бернард Больцано и Георг Кантор). Споря о взаимоотношениях членов пресвятой троицы, о соподчиненности ангелов, архангелов, херувимов и серафимов, схоласты были вынуждены рассматривать различные отношения порядка и иерархии — достаточно вспомнить сложнейшую архитектонику загробного мира, описанную Данте в «Божественной комедии» с ее кругами ада и различными областями чистилища и рая.

Схоласт Раймонд Люллий создал в XIII в. машину, состоявшую из нескольких кругов, на которых были нанесены основные предикаты, субъекты, атрибуты и иные понятия схоластической логики Вращая эти круги, он получал различные сочетания понятий и надеялся получить с их помощью истину.

Комбинаторика в странах Востока

В VIII в. н.э. начался расцвет арабской науки. Арабы перевели многие творения греческих ученых, изучили их, а затем продвинулись вперед в областях, мало привлекавших внимание греков,— в науке о решении уравнений (само слово «алгебра»— арабского происхождения), теории и практике вычислений и т. д. Решая вопрос об извлечении корней любой степени, арабские алгебраисты пришли к формуле для степени суммы двух чисел, известной под исторически неверным названием «бином Ньютона». По-видимому, эту формулу знал живший в XI—XII вв. н. э. поэт и математик Омар Хайям. Во всяком случае уже в XIII в. такую формулу приводит в своих трудах Насир ад-Дин ат-Туси, а в XV в. она была исследована Гиясэддином ал-Каши.

Судя по некоторым европейским источникам, восходящим к арабским оригиналам, для отыскания коэффициентов этой формулы брали число 10001 и возводили его во

2-ю, 3-ю, ..., 9-ю степени. Получалась таблица

1000900360084012601260084003600090001
100080028005600700056002800080001
10007002100350035002100070001
1000600150020001500060001
100050010001000050001
10004000600040001
1000300030001
100020001
10001

в которой жирным шрифтом выделены коэффициенты бинома Ньютона. Если опустить в этой таблице излишние нули, то получится треугольная таблица из биномиальных коэффициентов. Арабские ученые знали и основное свойство этой таблицы, выражающееся формулой

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.$$

Одновременно с арабами вычислением биномиальных коэффициентов занимались китайские математики. Они составили к XIII в. н. э. таблицу таких чисел вплоть до $n = 8$, приведенную в книге алгебраиста Чжу Ши-дзе «Яшмовое зеркало». Имеются указания, что астроном И Синь в VIII в. н. э. вычислил количество различных расположений фигур в игре, напоминавшей шахматы.

Интересовались сочетаниями и в Индии. Еще во II в. до н. э. индийцы знали числа C_n^k и тот факт, что сумма $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$ равна 2^n. А в XII в. индийский математик Бхаскара написал книгу «Лилавати», в которой среди других вопросов математики изучает и проблемы комбинаторики. Он пишет о применениях перестановок к подсчету вариаций размера в стихосложении, различных расположений в архитектуре и т. д. Он дает также правила для отыскания числа перестановок и сочетаний нескольких предметов, причем рассматривает также и случай, когда в этих перестановках есть повторяющиеся элементы.

Liber Abaci

В начале XII в. Западная Европа начала пробуждаться после многовековой духовной спячки. Развитие торговли с Востоком привело к проникновению в Европу арабской науки. Наиболее смелые и любознательные европейцы пробирались в находившуюся под владычеством арабов Испанию и знакомились там не только с творениями греческих ученых, но и достижениями арабской и индийской научной мысли — алгеброй и десятичной системой счисления.

В арабских учебных заведениях получил образование и Леонардо — сын пизанского купца, торговавшего в Алжире. В своей книге «Liber Abaci», вышедшей в 1202 г., Леонардо, получивший прозвище Фибоначчи, привел в систему всю арифметику арабов, некоторые сведения по геометрии Евклида и добавил к ним результаты своих изысканий. Труд Фибоначчи содержал и новые комбинаторные задачи, например об отыскании наименьшего количества гирь, с помощью которых можно получить любой целый вес от 1 до 40 фунтов. Рассматривал Леонардо и отыскание целых решений уравнений. В дальнейшем аналогичные задачи привели к отысканию количества натуральных решений систем уравнений и неравенств, которое может рассматриваться как одна из глав комбинаторики.

Но главной заслугой Леонардо перед комбинаторикой было то, что он сформулировал и решил задачу о кроликах. Со времен греческих математиков были известны две последовательности, каждый член которых получался по определенным правилам из предыдущих — арифметическая и геометрическая прогрессии. В задаче Леонардо появилась новая последовательность, члены которой были связаны друг с другом соотношением $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$. Это была первая в истории науки формула, в которой следующий член выражался через два предыдущих. Подобные формулы получили название рекуррентных (от латинского recurrere — возвращаться). Метод рекуррентных формул оказался впоследствии одним из самых мощных для решения комбинаторных задач.

Игра в кости

Значительный толчок к развитию комбинаторики дали азартные игры, существовавшие еще в глубокой древности, но получившие особенное распространение после крестовых походов. Наибольшее распространение получила игра в кости — два или три кубика с нанесенными на них очками выбрасывали на стол, и ставку брал выбросивший бо́льшую сумму очков. В кости играли повсюду, выигрывая и проигрывая в них золото, за́мки, драгоценные камни и лошадей. Атос — один из героев «Трех мушкетеров» — умудрился играть в кости даже на своего слугу Гримо. Постановления церковных соборов, поучения святых отшельников полны грозных запретов этой игры. Мусульманские ученые писали про игру в нарды, в которой передвижения шашек определяются броском костей: «Как же отвратительно для мудрого стать рабом двух камней до такой степени, что он вручает свое достояние и свою землю в их руки, и они приказывают ему и запрещают, а он подчиняется их руководству больше, чем подчиняется верблюд, когда его ведет маленькая девочка».

Но ничто не помогало, и в любом городе можно было наблюдать картину, описанную в «Божественной комедии» Данте:

> Когда кончается игра в три кости,
> То проигравший снова их берет,
> И мечет их один в унылой злости;
> Другого провожает весь народ...

Несмотря на древность игр, в которых применялись кости (археологические раскопки показали, что игральные кости были знакомы еще этрускам и жителям Мохенджо-Даро), они долго не подвергались математическому исследованию. Но игроки, неустанно упражнявшиеся в бросании костей, заметили, что некоторые суммы очков выпадают часто, а другие — редко [1]. Пытаясь понять в чем дело, составили таблицы, показывавшие, сколькими способами можно получить то или иное число очков. На первых порах иногда допускалась ошибка — подсчитывали лишь число различных сочетаний костей, дававших данную сумму. Например, при бросании двух костей сумма 6 получается из сочетаний (1, 5), (2, 4), (3, 3), а сумма 7 — из сочетаний (1, 6), (2, 5), (3, 4). Так как в обоих случаях получается три различных сочетания с данной суммой,

---

[1] Само слово «азартный» происходит от арабского «азар»— трудный, так называли редко выпадавшие комбинации костей.

то можно сделать ошибочный вывод, что суммы очков 6, 7 и 8 (также получаемая из трех сочетаний костей) должны выпадать одинаково часто. Но это противоречит опыту — 7 очков выпадает чаще. Дело в том, что при бросании двух костей сочетание (3, 3) может быть получено единственным образом, а сочетание (3, 4)— двумя способами. Этим объясняется бо́льшая частота выпадения суммы 7.

Таким образом, оказалось, что надо учитывать не только сочетания очков, но и их порядок.

Более сложными оказались соответствующие исследования для трех костей. Здесь при учете порядка костей оказывается 216 различных комбинаций, а без учета порядка — лишь 56.

Этими вопросами занимались такие известные итальянские математики XVI в., как Д. Кардано, Н. Тарталья и др. Наиболее полно исследовал его в XVII в. Галилео Галилей, но его рукопись оставалась неопубликованной до 1718 г.

Игрок и ученые

Одним из самых азартных игроков в кости в XVII в. был шевалье де Мерэ, непрерывно изобретавший новые виды состязаний. Например, он предложил, что будет бросать четыре кости и брать выигрыш лишь в случае, когда хотя бы одна из них откроется на шести. Однако вскоре его партнеры отказались от участия в такой игре — шевалье чаще выигрывал, чем проигрывал. Тогда де Мерэ придумал новый вариант — он бросал несколько раз пару костей и брал выигрыш, если хотя бы раз выпадали две шестерки. Надо было лишь определить, сколько следует сделать бросков, чтобы игра была ему столь же выгодна, как и первая. Шевалье решил, что надо бросать кости 24 раза. Ведь при четырех бросках одной кости шестерка выпадала более чем в половине случаев, а так как вторая кость дает шесть вариантов выпадения, то и надо умножить 4 на 6.

Рассуждение казалось безукоризненным, но опыт не подтвердил надежд де Мерэ — теперь он стал чаще проигрывать, чем выигрывать. В полном недоумении он обратился за разъяснениями к двум крупнейшим математикам

Франции XVII в. — Блэзу Паскалю и Пьеру Ферма. Разбираясь в этой и других задачах, поставленных перед ними де Мерэ (в частности, в задаче о разделе ставки, если серия партий не закончена, причем одному игроку осталось выиграть одну партию, а второму — две партии), они сформулировали и доказали первые теоремы комбинаторики и теории вероятностей.

Новая ветвь математики

Работы Паскаля и Ферма ознаменовали рождение двух новых ветвей математической науки — комбинаторики и теории вероятностей. Если до них комбинаторные проблемы лишь затрагивались в общих трудах по астрологии, логике и математике, а большей частью относились к области математических развлечений, то уже в 1666 г. Готтфрид Вильгельм Лейбниц публикует «Диссертацию о комбинаторном искусстве», в которой впервые появляется сам термин «комбинаторный». Титульный лист книги двадцатилетнего автора, имевшего уже ученую степень бакалавра... юриспруденции, обещал приложения ко всем областям науки и новый подход к логике изобретения, а тематика введения могла соперничать по своей широте с программой, которую, как свидетельствует Льюис Кэрролл, наметил Плотник для бесед с устрицами. Правда, о королях и капусте речи там не было, но зато провозглашалось приложение теории к замка́м, орга́нам, силлогизмам, смешению цветов и стихосложению, к логике, геометрии, военному искусству, грамматике, юриспруденции, медицине и теологии.

Однако про эту диссертацию можно сказать то же, что Иммануил Кант сказал о всем творчестве Лейбница: «Знаменитый Лейбниц обладал многими действительными знаниями, которыми он обогатил науки, но еще более грандиозны были его замыслы, выполнения которых мир тщетно от него ждал». Диссертация Лейбница должна была стать лишь началом большой работы, о которой он часто упоминал в своих письмах и печатных трудах и для которой делал в своих записных книжках многочисленные заметки. Из них видно, что Лейбниц планировал для комбинаторики все новые и новые приложения: к кодированию и декодированию, играм, статистике, теории наблюдений. Он считал, что комбинаторика должна заниматься одинаковым и различным, похожим и непохожим, абсолютным и относительным расположением, в то время как обычная математика занимается большим и малым, единицей и многим, целым и частью. Иными словами, под комбинаторикой Лейбниц понимал примерно то, что мы теперь называем дискретной математикой. К области комбинаторики Лейбниц относил и «универсальную характеристику»— математику суждений, т. е. прообраз нынешней математической логики.

Проекты Лейбница казались несбыточными здравомыслящим математикам его времени, но сейчас, после создания быстродействующих вычислительных устройств, многие планы Лейбница стали претворяться в жизнь, а дискретная математика выросла в своем значении настолько, что начала соперничать с классическим математическим анализом.

В 1713 г. была опубликована книга «Искусство предположений» Якоба Бернулли, в которой указывались формулы для числа размещений из n элементов по k, выводились выражения для степенных сумм и т. д. Замечательные достижения в области комбинаторики принадлежат одному из величайших математиков XVIII в., Леонарду Эйлеру, швейцарцу, прожившему почти всю жизнь в России, где он был членом Петербургской академии наук. Основная часть научной работы Эйлера посвящена математическому анализу, в котором он проложил новые пути, создал целый ряд новых областей и подвел итоги исследованиям в других областях. Но у Эйлера хватало времени размышлять и о задачах, которые, казалось бы, не заслуживали его внимания,— о том, можно ли обойти мосты в Кенигсберге (ныне Калининграде) так, чтобы не побывать дважды на одном и том же мосту, можно ли поставить 36 офицеров из 6 разных полков так, чтобы в каждой шеренге и каждой колонне было по одному офицеру каждого воинского звания из каждого полка, сколькими способами можно разбить данное число на слагаемые и т. д. Но, странное дело, работа о мостах явилась зерном, из которого впоследствии выросли топология и теория графов, задача об офицерах оказалась сейчас связанной с планированием экспериментов, а методы, использованные при решении задачи о разбиении чисел, после длительного и сложного пути развития превратились в науку об интегральных преобразованиях, применяемую для решения уравнений математической физики.

После работ Паскаля и Ферма, Лейбница и Эйлера можно было уже говорить о комбинаторике как о самостоятельной ветви математики, тесно связанной с другими областями науки, такими, как теория вероятностей, учение о рядах и т. д. В конце XVIII в. немецкий ученый Гинденбург и его ученики сделали даже попытку построить общую теорию комбинаторного анализа. Однако она не увенчалась успехом — в то время еще не было накоплено достаточного количества важных и интересных задач, которые могли бы дать необходимый фундамент для такой теории.

В XIX в. в ходе исследований по комбинаторике стали прослеживаться связи этой теории с определителями, конечными геометриями, группами, математической логикой и т. д.

Шифры и анаграммы

Не только азартные игры давали пищу для комбинаторных размышлений математиков. Еще с давних пор дипломаты, стремясь к тайне переписки, изобретали все более и более сложные шифры, а секретные службы других государств пытались эти шифры разгадать. Одним из простейших шифров была «тарабарская грамота», в которой буквы заменялись другими по определенным правилам. Однако такие шифры легко разгадывались по характерным сочетаниям букв. Поэтому стали применять шифры, основанные на комбинаторных принципах, например, на различных перестановках букв, заменах букв с использованием ключевых слов и т. д.

Для кодирования и расшифровки привлекались математики. Еще в конце XVI в расшифровкой переписки между противниками французского короля Генриха III и испанцами занимался один из создателей современной алгебры Франсуа Виета. А в Англии XVII в. монархистские заговорщики поражались быстроте, с которой Кромвель проникал в их замыслы. Монархисты считали шифры, которыми они пользовались при переписке, неразгадываемыми, и считали, что ключи к ним были выданы кем-то из участников заговора. И лишь после падения республики и воцарения Карла II они узнали, что все их шифры разгадывал один из лучших английских математиков того времени, профессор Оксфордского университета Уоллис, обладавший исключительными комбинаторными способностями. Он назвал себя основателем новой науки «криптографии» (тайнописи).

Шифрами пользовались не только дипломаты и заговорщики, но и сами ученые. До XVII в. почти не существовало научных журналов. Ученые узнавали о трудах своих коллег из книг или частных писем. Это создавало большие трудности при опубликовании новых результатов — ведь печатание книг занимало целые годы, а написать о своем открытии в частном письме было рискованно — не ровен час, кто-нибудь присвоит достижение, и поди доказывай, что он не сам придумал, а узнал из полученного письма. Поэтому часто возникали споры о приоритете. Еще в конце XVII в. шли долгие споры о приоритете между Ньютоном и Лейбницем (о том, кто первый открыл дифференциальное и интегральное исчисления), Ньютоном и Гуком (кто первый сформулировал закон всемирного тяготения) и т. д.

А в древности Архимеду пришлось даже пуститься на хитрость. Когда некоторые александрийские ученые присвоили себе его результаты, о которых узнали из полученных от него писем, он написал им еще одно послание. В нем содержались совершенно замечательные правила для вычисления площадей и объемов различных фигур и тел. Александрийцы снова сказали, что эти формулы они давным-давно знают и ничего нового Архимед им не сообщил. Но тут выяснилось, что Архимед поймал их в ловушку — сообщенные в письме результаты были неверными!

Для того чтобы и приоритет обеспечить, и не допустить преждевременной огласки полученных результатов, ученые в краткой фразе формулировали суть открытия, а потом переставляли в ней буквы и посылали письмо с переставленными буквами своим коллегам. Такие тексты с переставленными буквами называются *анаграммами*. Например, слова «Москва» и «смоква»— анаграммы. Когда же печаталась книга с подробным изложением результатов, в ней давалась и расшифровка анаграммы.

Однако не всегда анаграммы позволяли сохранить тайну. Когда Гюйгенс открыл первый спутник Сатурна и определил период его вращения вокруг планеты, он изложил свое открытие в анаграмме и послал ее своим коллегам. Однако уже упоминавшийся выше Уоллис, получив эту анаграмму, разгадал ее, после чего составил свою анаграмму и послал Гюйгенсу. Когда ученые обменялись разгадками анаграмм, то получилось, что будто бы Уоллис еще до Гюйгенса сделал то же самое открытие. Потом Уоллис признался, что подшутил над Гюйгенсом, чтобы доказать бесполезность анаграмм в деле тайнописи. Однако, хотя Гюйгенс и сам был большим любителем и знатоком комбинаторики, он не оценил шутки и рассердился.

Иероглифы и клинопись

Навыки в разгадке сложных шифров помогли ученым, когда археологи стали откапывать камни и черепки с таинственными знаками — письменностью, замолкшей несколько тысячелетий тому назад. Одним из самых замечательных успехов в деле расшифровки таких текстов было прочтение французским филологом Жаном Франсуа Шампольоном иероглифов, которыми писали египтяне еще до того, как возникла наука у древних греков.

У Шампольона были предшественники — шведский археолог Д. Окерблад и английский физик Т. Юнг, которые подвергли египетские тексты комбинаторному анализу. В их руках были «билингвы»— надписи сделанные одновременно на египетском и греческом языках. Сравнивая оба текста и выясняя повторяемость групп знаков, Окерблад опознал некоторые знаки так называемого демотического письма — поздней стадии развития египетской письменности. А создатель волновой оптики Томас Юнг любил на каникулах отдохнуть от размышлений на физические темы и занимался то каллиграфией, то составлением алфавитов иностранных языков, то... танцами на слабо натянутом канате,— по мнению Юнга, все, что мог сделать один человек, мог повторить другой. В 1814 г. он взял с собой на каникулы древнеегипетский папирус и попробовал прочесть его. Не имея должной филологической подготовки, путем лишь комбинаторного исследования текста он получил интересные результаты, а затем попробовал читать иероглифы. Кое-каких успехов он добился и здесь, но сказалось недостаточное знание языков — он искал иероглифы не только для согласных, но и для гласных букв, а в египетском письме гласные опускались. Лишь Шампольону, сочетавшему незаурядный комбинаторный дар с глубочайшим знанием филологии, удалось прочесть иероглифы.

Сложность задачи, стоявшей перед Шампольоном, усугублялась тем, что не были известны ни язык надписей, ни смысл знаков. Однако, выделив знаки, которые в греческом тексте обозначали имена царей, Шампольон обнаружил, что некоторые знаки в именах фараонов Птолемея и Клеопатры совпадают. Так были найдены звучания иероглифов, означавших буквы «п» и «л» (до этого места дошел и Юнг). А затем Шампольон прочел имена римских императоров Тиберия и Траяна, древних фараонов Рамсеса и Тутмеса — ключ к чтению иероглифов, утерянный несколько тысячелетий тому назад, был вновь обретен.

Это было торжеством комбинаторного метода в чтении забытых письменностей, основанного на наблюдениях над текстом, на сопоставлении повторяемости комбинаций слов и грамматических форм в сочетании с соображениями, связанными с назначением надписи, временем и условиями ее составления и т. д.

Еще теснее связана с комбинаторикой история расшифровки клинописных надписей. Историкам удалось установить, что эти надписи были сделаны в эпоху Ахеменидов, правивших в Иране два с половиной тысячелетия тому назад. Были сделаны и предположения о языке надписей. А потом комбинаторный анализ текста вскрыл часто повторявшуюся группу из семи знаков. Иногда эта группа повторялась дважды подряд с небольшими изменениями. И датский ученый Мюнтер решил, что эта группа означает слово «царь», а повторенная дважды — «царь царей». Но узнать звучание этих знаков Мюнтер не сумел. Это сделал молодой немецкий учитель Гротефенд. Любитель различных головоломок и тайнописи, он однажды (как гласит предание, после веселого вечера в дружеской компании...) заключил пари, что расшифрует клинопись. Анализируя сочетания знаков около титулов «царь» и «царь царей», Гротефенд обнаружил, что некоторые из них встречаются в разных позициях. Отсюда был сделан вывод, что это имя царя, которое в иной позиции означает «сын царя такого-то». Это позволило опознать и группу знаков для слова «сын». В одном месте после этой группы знаков не стояло слово «царя». Значит, решил Гротефенд, царь, о котором идет здесь речь, не был сыном царя — это был сам основатель династии Дарий, сын Гистаспа. А так как Дарий был отцом Ксеркса, то у Гротефенда были в руках звуковые значения для знаков, входивших в имена «Гистасп», «Дарий», «Ксеркс» — начало расшифровки клинописи было положено.

Комбинаторика позволила прочесть и крито-микенское линейное письмо. Первые прочные основы дешифровки этой письменности заложила Алиса Д. Кобер, защитившая в 1932 г. докторскую диссертацию по математике в Колумбийском университете. Наряду с исследованиями по чистой математике она много сил уделяла расшифровке древних письменностей. Изучив знаки критского письма, Кобер установила, что это письмо является слоговым. Далее она заметила, что в исследуемых текстах некоторые слова встречаются в трех различных формах, отличающихся друг от друга несколькими последними знаками, по-видимому, падежными окончаниями. А дальше она начала составлять «лингвистические уравнения» для слогов, позволившие ей найти слоги с одинаковыми согласными, но разными гласными, и одинаковыми гласными, но разными согласными. В результате Кобер получила координатную сетку, в которой вместо осей координат стояли номера гласных и согласных букв. У этой сетки был лишь один недостаток — никто не знал, какие именно гласные и согласные образуют эту систему координат.

Лишь через два года после смерти исследовательницы молодой английский архитектор Майкл Вентрис, расширяя ее координатную сетку, попробовал угадать значения некоторых гласных — число гласных меньше числа согласных, и перебор лучше начинать с них. Одна из попыток оказалась удачной — текст заговорил на языке, весьма напоминавшем греческий. Но это не был классический греческий язык «Илиады» и «Одиссеи», а греческий язык более ранней эпохи. Вентрису помог завершить расшифровку видный знаток раннего греческого языка Чэдвик. Используя имена царей и списки географических названий, исследователи расшифровывали один слог за другим. А потом началась цепная реакция дешифровки — три десятка знаков получили свое значение. Это был полный триумф комбинаторного подхода, основанного на следующем положении, сформулированном Вентрисом: «При попытке дешифровать документы на неизвестном языке, написанные неизвестным письмом, первый шаг состоит в установлении тех фактов, которые сами даются в руки при рассматривании имеющихся в распоряжении документов. Второй шаг состоит в том, что исследователь путем тщательного анализа и логической дедукции выявляет, какие выводы можно сделать из этих основных фактов».

При расшифровке буквенной письменности оказывается весьма важным отделение знаков, обозначающих гласные буквы, от знаков, обозначающих согласные буквы. И здесь на помощь приходит комбинаторика. Советский ученый В. В. Шеворошкин установил метод, основанный на комбинаторном сравнении частоты различных сочетаний пар знаков. Хорошо известно, что в языках гласные и согласные определенным образом чередуются друг с другом. Это позволяет разделить все знаки на две группы так, что, как правило, знаки одной группы перемежаются в тексте знаками другой группы. Тогда знаки, входящие в меньшую группу, будут обозначать гласные, а входящие в большую группу,— согласные. Этот метод дал исследователю ключ к чтению карийских надписей.

Комбинаторика в биологии

Сложность строения биологических систем, их строгая иерархичность, взаимослаженность отдельных процессов в целом организме делают биологию благодарным полем для приложения комбинаторных методов. Советский биолог А. А. Любищев полагал даже, что сходство растений и морозных узоров на окнах не случайно — в обоих случаях проявляются определенные законы комбинирования частей в единое целое.

Когда биологи стали изучать передачу генетической информации у бактерий, то обнаружили, что в процессе этой передачи хромосомы переходят от одной бактерии к другой не целиком. Они надеялись, изучая перешедшие части, выяснить порядок расположения генов в хромосоме. Здесь их постигла на первых порах неудача — карты хромосом, составленные в разных лабораториях, были непохожи друг на друга. Однако тщательно сравнив полученные карты, французские ученые Жакоб и Вальмон обнаружили их комбинаторное сходство. Выяснилось, что все эти карты были частями одного кольца — хромосомы бактерий оказались свернутыми в кольца, которые перед переходом в другую бактерию разрываются, после чего к одному концу прикрепляется фактор, перетаскивающий часть хромосомы в другую бактерию. А так как разрываться кольцо могло в любом месте, а фактор мог прикрепиться к любому концу, то и возникало все многообразие карт, которое путало картину.

Модель ДНК

Одной из наиболее сложных загадок в биологии XX в. было строение «нитей жизни»— молекул белка и нуклеиновых кислот. Оказалось, что молекулы белка — это объединения нескольких длинных цепей, составленных из 20 аминокислот.

Чтобы разгадать структуру хотя бы одной цепи, ее отделяют от остальных и подвергают действию ферментов, разрывающих цепь на строго определенные части. Эти части уже можно подвергнуть химическому анализу и выяснить в них порядок аминокислот. Затем возникает вопрос о сборке всей цепи из изученных частей. Для этого снова берут те же молекулы белка и подвергают их действию иных ферментов. Тогда они распадаются на другие части, строение которых тоже поддается изучению. Путем изучения перекрытий отдельных частей удается выяснить порядок аминокислот во всей цепи. Разумеется, такой комбинаторный анализ требует привлечения мощной вычислительной техники. Сочетая комбинаторные рассмотрения с изучением рентгеновских снимков, ученым удалось разгадать строение многих белков, в частности гемоглобина, инсулина и др.

Торжеством комбинаторного подхода к явлениям жизни можно считать расшифровку строения дезоксирибонуклеиновой кислоты (ДНК), сделанную в Кембридже Ф. Криком и Дж. Уотсоном в 1953 г. Было известно, что ДНК играет важную роль в наследовании свойств организмов. Это привлекало к ее изучению многих исследователей. Химический анализ показал, что в состав ДНК входят фосфатосахарные группы, соединенные с четырьмя азотистыми основаниями — двумя пиримидиновыми (цитозин и тимин) и двумя пуриновыми (аденин и гуанин), причем пуриновые основания по размерам больше пиримидиновых. Такие группы, соединенные с основаниями, называют *нуклеотидами*. Американский химик Чаргафф тщательнейшим образом измерил количество различных нуклеотидов в ДНК растений и животных и открыл удивительную зависимость: количество молекул аденина всегда равнялось количеству молекул тимина, а количество молекул гуанина — количеству молекул цитозина.

Вопрос состоял в том, как соединены между собой нуклеотиды и как это соединение объясняет генетические свойства ДНК. А это уже был вопрос, связанный с комбинаторикой. По аналогии с ранее изученным строением белков возникла идея о спиральной структуре ДНК.

Крик и Уотсон решили начать комбинировать нуклеотиды друг с другом так, чтобы они дали спираль нужных размеров (эти размеры были установлены ранее с помощью рентгеноструктурного анализа). В мастерской изготовили модели нуклеотидов и началось комбинирование их друг с другом, корректируемое соображениями, основывающимися на квантовой механике и биохимии. После нескольких неудачных попыток оказалось, что наилучшей конструкцией является винтовая лестница, в которой фосфатосахарные группы образуют перила, а ступеньки состоят из пар азотистых оснований — аденина с тимином или гуанина с цитозином. Так как каждую ступеньку можно еще повернуть на 180°, то получается четыре вида ступенек.

Генетический код

После открытия Крика и Уотсона возник вопрос, каким образом молекулы ДНК передают организму инструкции о построении цепей аминокислот, составляющих белки. Над этим вопросом задумался американский физик Г. Гамов. Узнав от Крика и Уотсона, что речь идет о 20 аминокислотах, он сформулировал задачу следующим образом: как с помощью 4 видов нуклеотидов можно зашифровать 20 видов аминокислот?

На первых порах Гамов подверг эту проблему чисто комбинаторному анализу, выделив вопросы, касавшиеся комбинаторного строения кода:

1. Является ли код линейным (т. е. отвечает ли последовательность нуклеотидов последовательности аминокислот в конструируемых белках)?

2. Сколько нуклеотидов нужно для кодирования одной аминокислоты (это количество называют *кодовым числом* кода)?

3. Может ли одна и та же аминокислота кодироваться несколькими комбинациями нуклеотидов, или, как их называют, *кодонов* (*вырожден* код или нет)?

4. Может ли один и тот же нуклеотид участвовать в кодировании нескольких аминокислот (является ли код *перекрывающимся* или нет)?

Были серьезные основания считать код линейным. На вопрос о кодовом числе ответ дали простые комбинаторные соображения: число видов нуклеотидов равнялось 4 (аденин, гуанин, тимин, цитозин), а из 4 видов можно составить всего 16 различных пар:

АА АГ АТ АЦ
ГА ГГ ГТ ГЦ
ТА ТГ ТТ ТЦ
ЦА ЦГ ЦТ ЦЦ

Этого было недостаточно для кодирования 20 аминокислот. Значит, в кодон должны были входить по крайней мере 3 нуклеотида. Соображения экономии подсказали Гамову, что если трех нуклеотидов достаточно, то больше природа вряд ли потратит, а потому код должен быть триплетным — по 3 нуклеотида на одну аминокислоту.

Присоединяя к каждой из выписанных 16 комбинаций по очереди 4 нуклеотида, получаем 64 комбинации, а это больше числа аминокислот. Теперь надо было делать выбор между двумя предположениями: либо код вырожден, либо кодон определяется не упорядоченной тройкой нуклеотидов, а как-то иначе. Руководствуясь теми же соображениями экономии, Гамов решил, что на каждую аминокислоту природа отпустила лишь один кодон, т. е. что код должен быть невырожденным.

Так как число аминокислот равнялось 20, то надо было придумать 20 различных комбинаций, определяемых тройками ступенек. Комбинаторные рассмотрения показали, что число 20 можно получить так: брать любые тройки, но не учитывать в них порядок нуклеотидов, а интересоваться лишь составом троек. Эта идея была реализована Гамовым в виде ромбовидного кода, изображенного на рис. 6. Цифрами 1, 2, 3, 4 на этом рисунке обозначены нуклеотиды, а буквами — соответствующие аминокислоты. Здесь каждый ромб задается тройкой нуклеотидов, причем верхний и нижний нуклеотиды принадлежат разным половинам молекулы ДНК, а средние

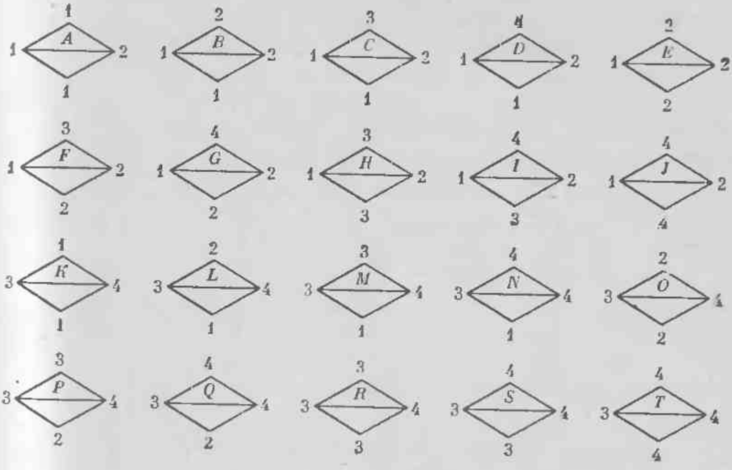


Рис. 6.

составляют одну ступеньку лестницы. Поскольку в ступеньке достаточно указать левую половину — правая определится этим однозначно, то ромбы Гамова определялись тройками нуклеотидов. А несущественность порядка нуклеотидов в кодоне проявлялась, по мнению Гамова, в том, что два ромба, получающиеся друг из друга перестановками верхнего и нижнего или левого и правого нуклеотидов, кодировали одну и ту же аминокислоту

Однако код Гамова не выдержал проверки экспериментом. Одной из его характерных черт была перекрываемость — один и тот же нуклеотид входил в три различных кодона. Это накладывало ограничения на порядок аминокислот в белковых молекулах — за аминокислотой, кодируемой тройкой одинаковых нуклеотидов, могли идти лишь 4 вида аминокислот, а именно те, в которых последний нуклеотид заменен любым из 4, а два первых остались неизменными. Иными словами, если бы код Гамова был верен, то должны были бы наблюдаться определенные комбинаторные закономерности в порядке аминокислот и частоте их появления. Некоторые последовательности аминокислот просто запрещались — для них нельзя было подобрать соответствующую последовательность нуклеотидов. Тщательный эксперимент показал, что такие закономерности не наблюдаются, а при анализе инсулина были обнаружены цепочки аминокислот, запрещенные кодом Гамова. Да и генетики показали, что код не может быть перекрывающимся — им удалось вызвать мутации, связанные с заменой лишь одной аминокислоты в синтезируемом клеткой белке, а по Гамову получалось, что при любой мутации, вызванной заменой одной ступеньки в ДНК, в белке одновременно заменяются три аминокислоты. В общем подтвердилось, что в науке больше красивых теорий, чем верных,— надо было искать неперекрывающиеся коды. Однако от идеи невырожденности ученые еще не отказались — она казалась связанной с принципом, по которому природа никогда не тратит излишних усилий.

Ф. Крик выдвинул идею невырожденного кода, составленного из неперекрывающихся кодонов. Тогда еще не было известно, где начинается чтение генетического кода. Поэтому Крик решил, что код должен обладать следующим свойством: смысл имеют не все перестановки из 3 нуклеотидов, а лишь некоторые из них. При этом разрешались лишь такие перестановки, чтобы в любой цепочке не возникло сомнений, является данная тройка нуклеотидов кодоном или состоит из частей двух соседних кодонов. Например, тройки ТГГ, ГАЦ и ГГА не могли одновременно быть кодонами — в цепочке ТГГАЦ нельзя было бы разгадать, что такое ГГА — отдельный кодон или смесь из частей двух кодонов. Код Крика совсем запрещал такие тройки, как ААА, в составленных из них цепях АААААА... нельзя было найти ни начала, ни конца кодонов. Это отметало 4 из 64 различных троек нуклеотидов. Оставшиеся 60 троек разбивались на классы по 3 тройки в каждой, так что тройки одного класса получались друг из друга циклическим перемещением (например, ТГА, АТГ, ГАТ) и из каждого класса бралась одна тройка. Получался код с требуемыми свойствами, состоявший из 20 кодонов — по одному на каждую аминокислоту.

Такой выбор кода снова накладывал определенные ограничения на относительную частоту нуклеотидов в ДНК, и Крик надеялся, что статистика подскажет, какая из букв означает некоторый нуклеотид. Но и здесь эксперимент не подтвердил предсказаний теории. Кроме того, критики отметили, что если, по мнению Крика, неизвестно, откуда начинать чтение кода, то столь же неизвестно, читать ли его слева направо или справа налево. Поэтому надо было объединять друг с другом не только кодоны, получающиеся друг из друга циклическими перестановками, но и кодоны, отличающиеся порядком чтения (например, АТЦ и ЦТА). А тогда число классов недостаточно для кодирования.

Чисто комбинаторные попытки разгадать тайну генетического кода оказались безуспешными. Но они позволили четко поставить все вопросы, которые надо было решить экспериментально. И в 1961 г. на биохимическом конгрессе в Москве слово для сообщения взял никому до того неизвестный американский ученый Ниренберг. Он сообщил об эксперименте, позволившем поставить в соответствие одному из кодонов определенную аминокислоту. Через несколько лет генетический код оказался полностью разгаданным. Из трех китов теории Гамова: код является невырожденным, перекрывающимся и триплетным, верным оказалось лишь последнее утверждение. На самом деле код неперекрывающийся и вырожденный — некоторые аминокислоты соответствуют четырем нуклеотидам. Были найдены и три бессмысленных кодона, которым не соответствует ни одна аминокислота. По-видимому, они играют роль знаков препинания в коде, показывая начало и конец синтезирования данного белка.

Теперь уже ясна и роль вырожденности кода. Из-за различных внешних воздействий в цепочке нуклеотидов возможны сбои. Благодаря вырожденности кода далеко не все сбои приводят к изменению синтезируемых аминокислот, к мутациям, которые могут оказаться гибельными для организма. Иными словами, вырожденность генетического кода повышает его помехоустойчивость.

Химический пасьянс

Немного найдется дней в истории науки, сравнимых по своему значению с 17 февраля 1869 г. В этот день из хаоса химических элементов, каждый из которых имел свои свойства, возникла стройная таблица — был открыт периодический закон. Это открытие было сделано Дмитрием Ивановичем Менделеевым, профессором Петербургского университета. Готовя курс лекций по общей химии, он задумался над порядком, в котором следовало рассказывать об элементах.

Еще до Менделеева ученые отметили сходство химических свойств некоторых элементов. Английский химик Ньюлендс в 1804 г. даже попробовал объединять элементы в тройки. Однако тогда было известно слишком мало элементов, а Ньюлендс не рискнул сделать предположение о существовании неоткрытых элементов. Поэтому в его тройки попали и совсем непохожие элементы, что вызвало у одного оппонента ехидный вопрос, а не пытался ли почтенный автор располагать элементы по алфавиту и не была ли при этом замечена какая-нибудь закономерность.

И все же Менделеев попробовал пойти по запретному пути, группируя друг с другом похожие элементы. Он сделал и следующий, самый трудный шаг, попробовав расположить в правильном порядке и сами группы. Как писал позднее сам Дмитрий Иванович: «Искать же чего-нибудь, хотя бы грибов, или какую-нибудь зависимость, нельзя иначе, как смотря и пробуя». Для того чтобы «смотреть и пробовать», он стал подбирать, написав на отдельных карточках элементы с их атомными весами и коренными свойствами, сходные элементы и близкие атомные веса.

Раскладывая свой химический пасьянс, великий ученый после напряженных размышлений нашел правильное расположение элементов Говорят, что окончательная форма таблиц предстала перед ним во сне, когда, утомленный непрерывным обдумыванием ее, он прилег отдохнуть. Удивительно, что эта работа, имевшая неисчислимые последствия для развития химии и физики, была выполнена Менделеевым за один день — утром 17 февраля 1869 г. он еще не начинал раскладывать свой пасьянс, а к вечеру того же дня таблица была написана.

Но не только в открытии периодической системы элементов оказалась полезна комбинаторика. Как известно, среди органических соединений встречаются изомеры, т. е. соединения, имеющие один и тот же состав, но разное строение. Комбинаторика дала возможность перечислить изомеры данного состава.

В физике комбинаторика оказывается необходимой при изучении свойств кристаллов, описании модели ферромагнетизма и т. д.

Комбинаторика эпохи компьютеров

Мы уже упоминали, что сейчас на наших глазах изменяется соотношение дискретной и классической математики. На протяжении двух с половиной столетий основную роль в изучении природы играл математический анализ - дифференциальное и интегральное исчисления, дифференциальные уравнения математической физики, вариационное исчисление и т. д. Процессы, имевшие атомистическую природу, заменялись непрерывными, чтобы можно было применять к ним развитый аппарат математики непрерывного. Дискретная математика была Золушкой, красота которой затмевалась блеском влиятельных и сильных сестер.

Положение дел коренным образом изменилось после того, как были созданы быстродействующие вычислительные машины. Теперь такие абстрактные области математики, как математическая логика, общая алгебра, формальные грамматики, стали прикладными — для составления алгоритмических языков, на которых пишут программы для машин, нужны специалисты именно в этих областях математики. Важную роль стали играть всевозможные разностные схемы, исследования решеток и их свойств. Приложения к экономике поставили перед математиками новые типы проблем, относящиеся к математическому программированию и, в частности, к целочисленному программированию (если при решении задачи окажется, что самым экономным будет грузить на платформу по 3,5 автомашины, то решение придется пересматривать).

В эту эпоху расцвета дискретной математики изменилась и роль древнейшей области дискретной математики — комбинаторики. Из области, интересовавшей большей частью составителей занимательных задач и находившей основные применения в кодировании и расшифровке древних письменностей, она превратилась в область, находящуюся на магистральном пути развития науки. Стали выходить журналы по комбинаторике, одна за другой печатаются книги, посвященные этой науке. С помощью быстродействующих вычислительных устройств стало возможно делать переборы, ранее требовавшие сотен и тысяч лет.

Читателя, который заинтересуется современными приложениями комбинаторной науки, мы отсылаем к книге «Прикладная комбинаторная математика», вышедшей в 1968 г.

Глава II
ВОЗМОЖНОЕ И НЕВОЗМОЖНОЕ В КОМБИНАТОРИКЕ

Проблемы комбинаторики

Мы рассказали об истории развития комбинаторики и о некоторых ее приложениях. Однако о том, что же такое комбинаторика, какие математические вопросы относятся к ней, а какие — к другим областям математики, было сказано весьма глухо. Это объясняется большим разнообразием комбинаторных проблем, затрудняющим формулировку единого определения, которое охватывало бы все частные случаи, а также тем, что многие комбинаторные задачи имеют пограничный характер, относясь и к комбинаторике, и к смежным областям знания.

В первом приближении можно сказать, что комбинаторика изучает способы выборки и расположения предметов, свойства различных конфигураций, которые можно образовать из элементов, причем элементами могут быть числа, точки, отрезки, шахматные фигуры и т. д. Характерной чертой комбинаторных задач является то, что в них речь идет всегда о **конечном** множестве элементов. Чтобы устранить влияние конкретного вида выбираемых и располагаемых предметов, надо воспользоваться общим языком теории множеств, говорить о множествах и их подмножествах (частях), об объединении нескольких множеств и их пересечении (образовании общей части) и т. д. В настоящее время все необходимые для понимания этой книги понятия теории множеств излагаются в четвертом и пятом классах средней школы. Если же читатель учился в школе в то время, когда в ней еще не изучали теорию множеств, то он может или посмотреть соответствующие разделы современных школьных учебников, или прочесть книгу автора «Рассказы о множествах». Мы будем рассматривать лишь конечные множества. Число элементов в множестве A будем обозначать $n(A)$ и называть *мощностью* этого множества, а множество из n элементов будем называть *n-множеством*.

С точки зрения теории множеств комбинаторика изучает подмножества конечных множеств, их объединения и пересечения, а также различные способы упорядочивания этих подмножеств. Одной из общих задач комбинаторики является следующая:

1. *Найти конфигурацию элементов, обладающую заранее заданными свойствами.*

В некоторых случаях такую конфигурацию удается найти сразу. Например, если требуется расположить 10 точек и 5 отрезков так, чтобы на каждом отрезке было по 4 точки, то после недолгих размышлений мы вспоминаем фигуру пятиконечной звезды и располагаем наши элементы так, как показано на рис. 7. Иногда для отыскания той или иной конфигурации оказываются полезными соображения симметрии. Если не удается найти

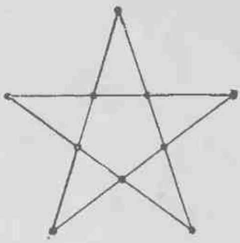


Рис. 7.

решение из простых соображений, в ход пускается тяжелая артиллерия: теория чисел, теория групп и т. д.

Бывает, однако, что и она не помогает — искомая конфигурация никак не складывается. Конечно, если задача возникла из практики, то в большинстве случаев можно быть уверенным в существовании решения. Гораздо хуже в этом отношении положение шахматиста, рассчитывающего комбинацию, или специалиста по шифрам, придумывающего новый код с заранее заданными свойствами. Они не знают заранее, существует ли то, что они ищут, не являются ли их труды поисками черной кошки в темной комнате, где кошки и в помине не было. Таким образом возникает вторая проблема комбинаторики.

2. *Доказать существование или отсутствие конфигурации с заданными свойствами.*

Во многих случаях, однако, бывает недостаточно найти одну конфигурацию с заданными свойствами, а требуется описать все такие конфигурации и найти их число. Например, можно потребовать найти не одно, а все возможные расположения 10 точек на 5 отрезках, при которых на каждом отрезке лежат по 4 точки. Можно доказать, что кроме изображенной на рис. 7 пятиконечной звезды есть еще пять расположений с таким свойством. Они изображены на рис. 8. Любое другое расположение с требуемыми свойствами отличается от одного из указанных шести лишь размерами отрезков, но не их взаимным расположением.

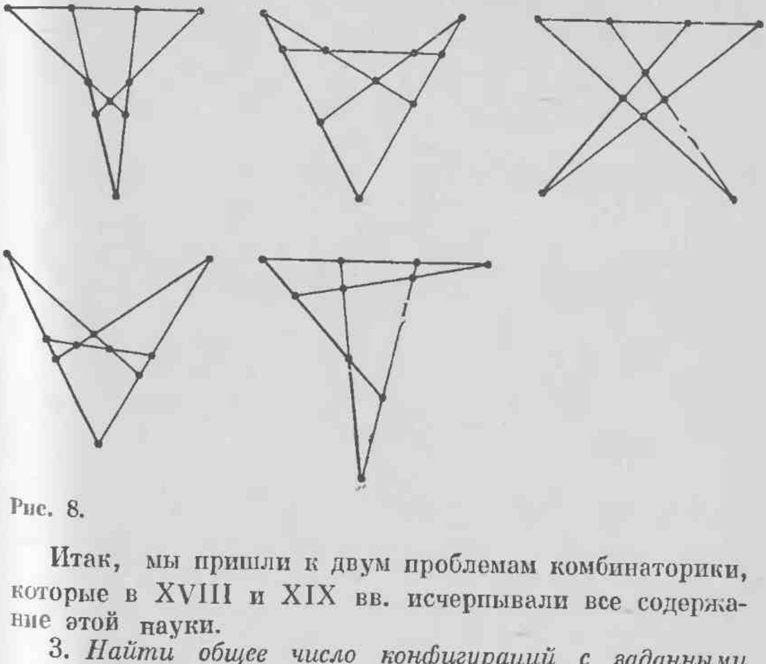


Рис. 8.

Итак, мы пришли к двум проблемам комбинаторики, которые в XVIII и XIX вв. исчерпывали все содержание этой науки.

3. *Найти общее число конфигураций с заданными свойствами.*

4. *Описать все способы решения данной комбинаторной задачи, дать алгоритм их перечисления.*

Бурное развитие экономических приложений математики привело к возникновению и изучению обширного (и, быть может, сейчас самого важного) класса комбинаторных задач — задач на оптимизацию.

5. *Из всех решений данной комбинаторной задачи выбрать оптимальное по тем или иным параметрам.*

Например, существует очень много способов прикрепить потребителей каменного угля к шахтам. Экономист будет искать способ, при котором транспортные расходы окажутся минимальными.

Одной из классических оптимизационных задач является «задача о коммивояжере», в которой требуется наметить путь бродячего торговца, объезжающего заданные n городов, причем он должен по одному разу побывать в каждом городе и проделать весь путь за наименьшее время. Несмотря на усилия многих специалистов, до сих пор нет достаточно общего и удовлетворительного решения этой задачи.

Магические квадраты

Покажем теперь примеры решения комбинаторных проблем. Начнем с той самой задачи, которую несколько тысяч лет тому назад решили китайские математики.

Расположить числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 в виде квадрата так, чтобы сумма чисел по каждому столбцу, строке и диагонали была одной и той же.

Методом прямого перебора решить эту задачу невозможно — 9 чисел можно расположить в виде квадрата 362 880 способами. Поэтому проведем математический анализ задачи. Выясним сначала, какой должна быть искомая сумма. Так как

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45,$$

то в каждой из 3 строк сумма чисел должна равняться 15. Это значительно уменьшает необходимый перебор — выбрать 3 слагаемых из данных чисел так, чтобы их сумма равнялась 15, можно лишь 8 способами: (9, 2, 4), (9, 5, 1), (8, 6, 1), (8, 5, 2), (8, 4, 3), (7, 6, 2), (7, 5, 3), (6, 5, 4). А число строк, столбцов и диагоналей в квадрате тоже равно 8. Значит, каждая из написанных комбинаций должна ровно один раз войти в искомый квадрат. Далее замечаем, что только число 5 входит в эти тройки 4 раза. Поэтому оно и должно стоять в центре таблицы на пересечении центральных строки, столбца и двух диагоналей. Числа 8, 2, 6 и 4, входящие в тройки по 3 раза, должны занять углы — они стоят на пересечении строки, столбца и диагонали. Оставшиеся числа 1, 3, 7 и 9 занимают места сверху, снизу, слева и справа от центра. Диагональные тройки (8, 5, 2) и (6, 5, 4) можно расположить 8 различными способами (у нас 2 диагонали, на каждой из которых можно еще переставлять крайние элементы). После выбора положения чисел 8, 2, 6, 4 положение остальных чисел однозначно определено. Мы не только нашли один магический квадрат 3-го порядка но и описали все такие квадраты из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Эта задача, разумеется, очень проста. Гораздо труднее найти все магические квадраты 4-го порядка. Один из магических квадратов 4-го порядка можно получить из обычного квадрата

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

если на каждой его большой диагонали поменять местами числа, симметричные относительно центра квадрата, т. е. числа 1 и 16, 6 и 11, 4 и 13, 7 и 10. В результате получим

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

В том, что полученный квадрат 4-го порядка магический, читатель легко убедится самостоятельно.

Еще более замечательным является магический квадрат 4-го порядка, найденный в индийской надписи XI или XII вв. н. э.:

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

Этот квадрат сохраняет свойство быть магическим и после того, как его строки одна за другой перемещаются сверху вниз (сначала первая под четвертой, затем вторая под бывшей первой и т. д.) или столбцы аналогично перемещаются слева направо. Иными словами, если сделать ковер из таких квадратов, то, вырезав его любую часть из 4 строк и 4 столбцов, получаем снова магический квадрат.

Всего существует 880 типов магических квадратов 4-го порядка.

Существуют методы построения магических квадратов и более высокого порядка. Такими построениями занимались один из основателей теории чисел П. Ферма, выдающийся английский математик А. Кели, известный современный математик О. Веблен. Удалось построить, например, магические квадраты, которые после удаления нескольких крайних полос снова дают магические квадраты, магические кубы, в которых все квадратные грани, параллельные паре боковых граней, представляют магические квадраты с одной и той же суммой и т. д.

Восемь королев

Во многих случаях никакие предварительные расчеты не позволяют найти конфигурацию элементов с заданными свойствами. Тогда остается единственный путь — перебирать все варианты в надежде хотя бы случайно найти желаемую комбинацию. Как рассказывает известный американский популяризатор Мартин Гарднер, в 1910 г. некий Клиффорд У. Адамс решил построить магический шестиугольник. Он взял набор из 19 шестиугольных плиток, написал на них числа от 1 до 19 и начал составлять из них всевозможные шестиугольники, надеясь наткнуться на магический. Этим высокополезным делом он занимался... 47 лет, и только в 1957 г. нашел один такой многоугольник. Затеряв бумажку с решением, он лишь в 1962 г. восстановил решение и после полувека изысканий опубликовал следующий ответ (рис. 9). Из рисунка видно, что суммы по всем направлениям этого многоугольника равны 38. Совершенно неожиданно оказалось, что полученное Адамсом решение единственно — никаких других магических шестиугольников не существует.

Значительно проще решить перебором следующую задачу: *поставить на шахматную доску наибольшее число ферзей (или, как говорили в старину, королев) так, чтобы* *ни один из них не мог взять другого.* Для читателей незнакомых с шахматной игрой, сообщим, что ферзи могут бить по горизонталям, вертикалям и диагоналям.

Так как на шахматной доске только 8 горизонталей, то ясно, что больше 8 ферзей поставить на доску не удастся. Поэтому попробуем поставить 8 ферзей так, чтобы выполнялось указанное условие. При любой такой расстановке на каждую вертикаль и каждую горизонталь попадет только один ферзь, а потому можно записать занятые поля в порядке возрастания номеров вертика-

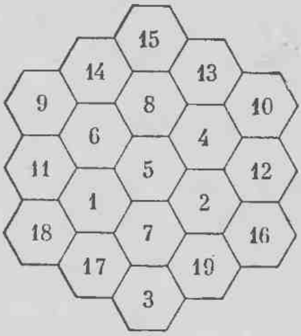


Рис. 9.

лей. Но тогда каждое расположение однозначно определяется номерами горизонталей занятых полей, т. е. некоторой перестановкой чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Например, перестановка 24165873 означает, что па доске заняты поля (1, 2), (2, 4), (3, 1), (4, 6), (5, 5), (6, 8), (7, 7), (8, 3), где (1, 2) — поле, стоящее на пересечении первой вертикали и второй горизонтали и т. д.

Эту задачу можно решить лишь прямым перебором вариантов. Чтобы сократить объем рассматриваемых позиций, поступают так. Сначала ставят ферзя в левый нижний угол, а затем ставят ферзей на каждую следующую вертикаль на первое снизу поле, не находящееся под боем ранее поставленных ферзей. Если доходят до вертикали, все поля которой биты, то передвигают ферзя на последней из занятых вертикалей, ставя его на следующее поле этой вертикали, не находящееся под боем. Если и это не помогает, передвигают ферзя по той же вертикали еще выше. Когда исчерпаны все возможности получить хоть одно свободное от боя поле на данной вертикали, передвигая ферзя на предыдущей вертикали, а нужной расстановки не найдено, начинают исправлять положение на вертикали, расположенной еще на один ряд влево. Через несколько таких шагов получают расстановку ферзей, которую можно задать последовательностью чисел 1, 5, 8, 6, 3, 7, 2, 4. Продолжая описанный процесс, находим 92 положения ферзей, обладающих требуемым свойством.

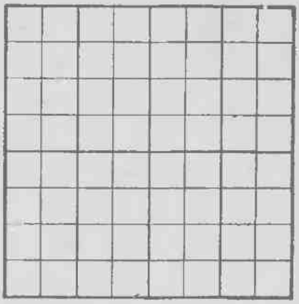
Если n не делится ни на 2, ни на 3, то на $(n \times n)$-доске существуют такие n расположений n ферзей, что каждое поле занято в одном и только одном расположении. Иными словами, в этом случае на доску можно поставить по n ферзей n различных цветов так, чтобы ферзи одного и того же цвета не могли бить друг друга.

Вся королевская конница...

В задаче о ферзях мы легко определили максимальное число фигур, которые можно поставить на доску, чтобы они не били друг друга,— для этого достаточно было пересчитать число горизонталей. Шахматный конь ходит хитрее, чем ферзь,— он перемещается или на 2 поля по вертикали и одно по горизонтали, или на 2 поля по горизонтали и одно по вертикали. Поэтому сразу сказать, чему равно наибольшее число коней, которых можно поставить на шахматную доску, чтобы они не били друг друга, сложнее. Впрочем, нетрудно найти нижнюю оценку для этого числа. Ведь при ходе коня каждый раз меняется цвет занятого им поля. Поэтому кони, поставленные на черные поля, бьют только белые поля, а друг друга бить не могут. Так как на доске 32 черных поля, то можно поставить требуемым образом 32 коней. Они держат под боем все белые поля. Проблема заключается в том, нельзя ли както перестроить расположение коней, поместив часть из них на черные поля, а часть на белые, чтобы нашлось место для 33-го коня. И хотя интуиция подсказывает, что это невозможно, нам нужно строгое математическое доказательство этой невозможности.

Здесь помогает общий принцип решения оптимальных проблем — *если решение является оптимальным в целом, то оно должно быть оптимальным и в любой своей части* — иначе, улучшив его в этой части, мы добьемся лучшего результата и в целом. Разделим всю доску на 8 частей, имеющих по 4 горизонтали и 2 вертикали (рис. 10) На каждой из них можно расположить четырех коней — любой конь на (2×4)-доске держит под боем ровно одно поле. Отсюда и следует, что на всю (8×8)-доску можно поставить лишь $8 \cdot 4 = 32$ коней, а это число коней мы уже умеем ставить. Второй способ расстановки заключается в том, что коней ставят на белые поля.

Рис. 10.



Точно так же доказывается, что на $(n \times n)$-доску можно поставить $n^2/2$ не бьющих друг друга коней, если n четно, и $(n^2 + 1)/2$ коней, если n нечетно.

Игра в 15

Решая задачу о конях, мы по сути дела доказали такое утверждение: на (8×8)-доску нельзя поставить более 32 не бьющих друг друга коней. Как уже говорилось выше, такие доказательства невозможности играют большую роль в комбинаторике.

В 1879 г. американский составитель шахматных задач и этюдов, головоломок и различных игр Сэмюэль Лойд свел с ума Европу и Америку квадратной коробочкой с 15 шашками. Коробочка имела 16 полей, а на шашках были нанесены числа от 1 до 15. Одно поле в коробочке было свободно и требовалось, передвигая каждым ходом одну шашку на свободное поле, перевести положение, изображенное на рис. 11, *а*, в стандартное положение (рис. 11, *б*). За решение задачи была предложена крупная сумма денег. Фабрикант, выпускавший игру, быстро разбогател — рассказывают, что священники не выпускали из рук коробочки с шашками во время богослужения, машинисты решали задачу, ведя поезда, торговцы забывали открывать свои магазины. Но никому не удавалось найти решение проблемы.

Горячка прошла лишь после того, как в 1880 г. была доказана неразрешимость задачи Лойда. Чтобы изложить это доказательство, нам придется пояснить, что называется *беспорядком* (или *инверсией*) в перестановке чисел. Возьмем перестановку 3142. В ней число 3 стоит перед 1 и 2, хотя и больше них. Это создает два беспорядка. Еще один беспорядок возникает из-за того, что число 4 стоит перед числом 2. Всего в этой перестановке три беспорядка.

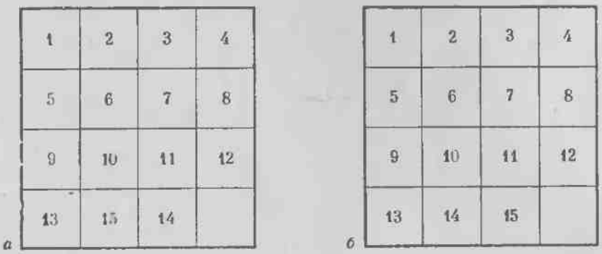


Рис. 11.

Если переставить два рядом стоящих числа, то количество беспорядков изменится на 1: или на 1 увеличится, если до перемещения меньшее число стояло перед большим, или на 1 уменьшится. Поэтому если число беспорядков было четным (нечетным), то оно станет нечетным (четным). Четность числа беспорядков называют *четностью перестановки*.

Выясним, что произойдет с четностью перестановки, если переставить два далеких друг от друга числа, например числа a и b в перестановке... a... b... Пусть между ними стоит r других чисел. Тогда перемещение можно выполнить в три этапа — сначала r перестановками соседних чисел поставить число a рядом с числом b, затем переставить между собой a и b и, наконец, еще r перестановками соседних чисел отправить b на то место, где раньше стояло a. Всего мы сделаем $2r + 1$ перестановок соседних чисел, т. е. обязательно нечетное число, а так как при каждой такой перестановке четность числа беспорядков меняется, то в конце всей операции четность перестановки изменится.

Теперь мы уже можем закончить анализ игры в 15. Каждое расположение шашек в этой игре можно задать с помощью некоторой перестановки 16 чисел (число 16 ставится на место свободной клетки). Для этого надо указать по очереди номера шашек в первой, второй, третьей и четвертой строках. Например, позиция на рис. 11, *а* задается так: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 14, 16. Каждое перемещение шашки на свободное место означает перестановку ее номера с числом 16 — номером пустого места. Поэтому каждое такое перемещение меняет четность перестановки и две перестановки чисел 1, 2, . . ., 16, получаемые друг из друга четным числом таких попарных обменов местами, должны иметь одинаковую четность. Но для того, чтобы пустая клетка («шашка 16») осталась на месте, она должна сделать столько же ходов влево, сколько и вправо, столько же ходов вверх, сколько и вниз. Иными словами, она должна сделать четное число ходов. Поэтому все перестановки, получаемые из стандартной перестановки перемещениями шашек в коробке и имеющие пустую клетку в правом нижнем углу, должны иметь ту же четность, что и стандартная перестановка, т. е. быть четными. А позиции на рис. 11, *а* соответствует нечетная перестановка, имеющая один беспорядок. Значит, перевести ее в стандартную невозможно.

Офицерское каре

Однажды каждый из четырех полков командировал на парад по 4 офицера, имеющих звания лейтенанта, старшего лейтенанта, капитана и майора. Можно ли построить этих офицеров в виде квадрата так, чтобы в каждой шеренге и каждой колонне были представители всех 4 полков и всех 4 воинских званий?

Попробуем сначала удовлетворить условию, касающемуся полков. Если обозначить эти полки прописными латинскими буквами A, B, C, D, то одно из возможных расположений офицеров имеет вид

$$\begin{matrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \\ C & D & A & B \\ D & C & B & A \end{matrix}$$

В эту таблицу латинские буквы A, B, C, D входят по одному разу в каждый столбец и каждую строку. Квадраты с n строками и n столбцами, составленные из n букв и обладающие указанным свойством, называют *латинскими квадратами* (причиной такого странного названия явилось то обстоятельство, что Эйлер, впервые рассматривавший эти квадраты, составлял их из латинских букв). Обозначим теперь 4 воинских звания строчными латинскими буквами a, b, c, d. По условию задачи эти буквы тоже должны образовывать латинский квадрат. Однако этот квадрат не может быть произвольным — если задать и полк, и звание, то найдется один офицер данного полка с данным званием, командированный на парад. Поэтому оба латинских квадрата должны наложиться друг на друга так, чтобы каждая пара из букв A, B, C, D и a, b, c, d встретилась после наложения лишь один раз (такие два латинских квадрата называют *ортогональными* друг другу).

Это можно сделать так:

$$
\begin{array}{cccc}
Ab & Dd & Ba & Cc \\
Bc & Ca & Ad & Db \\
Cd & Bb & Dc & Aa \\
Da & Ac & Cb & Bd
\end{array}
$$

Здесь не только по горизонталям и вертикалям, но и по обеим главным диагоналям буквы A, B, C, D, a, b, c, d встречаются лишь по одному разу.

Несколько больше смекалки требуется, чтобы разместить аналогичным образом офицеров из пяти полков, имеющих по пять различных воинских званий. Одно из решений имеет вид

$$
\begin{array}{ccccc}
Aa & Bb & Cc & Dd & Ee \\
Cd & De & Ea & Ab & Bc \\
Eb & Ac & Bd & Ce & Da \\
Be & Ca & Db & Ec & Ad \\
Dc & Ed & Ae & Ba & Cb
\end{array}
$$

Однако предпринятая Эйлером попытка построить пару ортогональных квадратов шестого порядка не увенчалась успехом. Все комбинации, которые он придумывал, не удовлетворяли нужным условиям. Поэтому Эйлер предположил, что задача просто неразрешима. Эта гипотеза была подтверждена в 1901 г. французским математиком Тарри, перебравшим все возможные расположения квадратов.

Но Эйлер, основываясь на неразрешимости задачи для $n = 2$ и $n = 6$, сделал предположение, что она неразрешима для всех чисел вида $n = 4k + 2$ (при остальных значениях n задача разрешима). Попытки доказать или опровергнуть гипотезу Эйлера были безуспешны до 1960 г., несмотря на привлечение электронных вычислительных машин (в те годы их быстродействие было еще недостаточным). Применяя методы теории чисел, работавшие в США математики Бозе, Паркер и Шриканда построили первый пример двух ортогональных латинских квадратов сначала для $n = 10$, а затем и для всех чисел вида $n = 4k + 2$ (разумеется, кроме чисел 2 и 6). С помощью новейших моделей электронных вычислительных машин были найдены многие такие квадраты.

Посев пшеницы

Автор предвидит недоумение читателя, зачем было тратить столько усилий для решения задачи о расположении офицеров, не имеющей никакого практического значения. Но в комбинаторике часто случается, что задача, на первый взгляд кажущаяся пустой головоломкой, получает в дальнейшем применения в самых различных областях практической деятельности. Сейчас выяснилось, что задачи, аналогичные эйлеровской, имеют важное значение для правильной постановки экспериментов.

Пусть, например, требуется проверить влияние n видов удобрений на n видов пшеницы. Для этого надо разбить все поле на n^2 участков и использовать на каждом участке свою комбинацию сорта пшеницы и удобрения. Однако при этом не исключено, что на исход опыта повлияет различие в урожайности разных участков поля. Чтобы исключить это влияние, надо постараться, чтобы каждый сорт пшеницы и каждый вид удобрения встретились по одному разу в каждой строке и каждом столбце разбиения (мы, конечно, считаем поле прямоугольным).

Записав в каждую клеточку названия сорта и удобрения, получаем совмещенную пару ортогональных латинских квадратов.

Разумеется, число сортов пшеницы не обязано совпадать с числом видов удобрения. Кроме того, возможны дополнительные ограничения на постановку эксперимента. Поэтому при планировании опытов используют не только латинские квадраты, но и более общие расположения, называемые *блок-схемами*. Блок-схемой называют размещение элементов в блоки, подчиненное некоторым условиям относительно появления элементов и их пар. Например, можно потребовать, чтобы каждый блок содержал одно и то же число элементов, каждый элемент принадлежал одному и тому же числу блоков, а каждая пара элементов тоже принадлежала одному и тому же числу блоков.

Теория блок-схем является сейчас важной главой комбинаторики. До сих пор неизвестны условия, необходимые и достаточные для того, чтобы существовали блок-схемы с заданными параметрами. Еще дальше от разрешения вопрос о перечислении таких блок-схем.

Трудность отыскания требуемых блок-схем показывает следующая задача.

Группа из 15 детей ежедневно строится на прогулку по-трое. Можно ли организовать прогулки так, чтобы в течение недели ни одна пара детей не была дважды в одной тройке?

Сначала выясним, хватит ли пар для решения задачи. Из 15 детей можно составить 105 различных пар (для каждого из них можно выбрать пару 14 способами, но при этом, например, пара (a, b) встретится дважды — когда к a присоединяют b и когда к b присоединят a; значит, число пар равно $15 \cdot 14 : 2 = 105$). В каждой тройке есть 3 различные пары (например, в тройке (a, b, c) — пары (a, b), (a, c), (b, c)). Значит, в 5 тройках содержится 15 пар, а в течение недели получаем $15 \cdot 7 = 105$ пар.

Полученный результат означает лишь возможность искомого распределения детей по тройкам. Чтобы доказать существование этого распределения, надо конкретно его построить.

Читатель, который попробует найти искомое расположение, быстро почувствует трудность задачи: через несколько шагов остаются тройки, из которых не получаются группы, содержащие по одному разу всех 15 детей. Тем не менее искомое расположение существует:

klo	*ino*	*jmo*	*ilm*	*jln*	*ijk*	*kmn*
iab	*jac*	*lad*	*nae*	*kaf*	*mag*	*oah*
ncd	*mdb*	*kbc*	*ocg*	*mch*	*lce*	*icf*
mef	*keg*	*ieh*	*jfb*	*obe*	*ofd*	*jde*
jgh	*lhf*	*nfg*	*khd*	*idg*	*nhb*	*lbg*

Можно доказать, что такое же распределение существует, если число детей равно $6n+3$; они строятся по-трое, а прогулки проводятся в течение $3n+1$ дней.

Число знакомых

Подсчитывая число расположений ферзей, мы бросили мимоходом фразу: «так как на шахматной доске только 8 горизонталей, то больше 8 ферзей поставить на доску не удастся». Если развернуть эту аргументацию подробнее, то она приняла бы такой вид: «Когда на шахматную доску, имеющую 8 горизонталей, ставят 9 ферзей, то хотя бы одна пара ферзей оказывается на одной и той же горизонтали, а потому будет бить друг друга». Подобные рассуждения часто встречаются в математике, они получили даже особое название *принципа Дирихле* по имени немецкого математика, часто применявшего их в исследованиях по теории чисел. Этот принцип гласит:

Если в n ящиков положено более чем n предметов, то хотя бы в одном ящике лежат два или более предметов.

Несмотря на свою простоту и очевидность, принцип Дирихле позволяет получать далеко не очевидные результаты. Докажем с его помощью, например, такое утверждение:

Если в зале находится n человек, то хотя бы двое из них имеют одинаковое число знакомых среди присутствующих (мы, разумеется, считаем отношение «a знаком с b» взаимным — если a знаком с b, то и b знаком с a).

В самом деле, число знакомых каждого человека может принимать значения от 0 (если он не знаком ни с кем в зале) до $n-1$ (если он знаком со всеми присутствующими), т. е. n различных значений. Возможны два случая — либо хотя бы для одного значения k, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, в зале нет человека с k знакомыми, либо для всех k найдется хотя бы один человек, имеющий ровно k знакомых в зале. В первом случае число различных значений для k меньше, чем n (хотя бы одно значение пропущено), а тогда по принципу Дирихле хотя бы для двух из n человек значение k одно и то же. Иными словами, в первом случае есть двое людей, имеющих поровну знакомых.

Осталось показать, что второй случай невозможен. В этом случае в зале был бы человек с 0 знакомыми и человек с $n-1$ знакомыми. Но это невозможно, так как если эти люди знакомы друг с другом, то первый уже имеет хотя бы одного знакомого, а если они не знакомы, то число знакомых второго человека меньше, чем $n-1$. Утверждение доказано. Его можно сформулировать геометрически так.

Если некоторые из n точек плоскости соединены отрезками, то всегда найдутся две точки, из которых выходит поровну отрезков.

Научная переписка

Шесть ученых A, B, C, D, E и F переписывались друг с другом по двум научным темам. Каждый переписывался с каждым по одной теме. Докажите, что найдутся трое ученых, переписывающихся между собой по одной и той же теме.

В самом деле, ученый A переписывается с 5 коллегами. По каким бы темам он с ними ни вел переписку, найдутся трое ученых (например, B, C, D), с которыми он переписывается по одной и той же теме (например, по первой). Если хотя бы двое из этих трех ученых переписываются по первой теме, то, присоединив к ним A, получим тройку переписывающихся по первой теме. Если же никто из троих не переписывается друг с другом по первой теме, то они переписываются по второй теме, и мы снова получили тройку ученых, переписка которых посвящена одной и той же теме.

Если бы число ученых было меньше 6, то утверждение уже не было бы верным — можно так организовать переписку, чтобы никакая тройка не занималась одной и той же темой. Например, достаточно, чтобы из ученых A, B, C, D и E по первой теме вели переписку A с B и C, B с D, C с E, а остальные пары интересовались второй темой.

Если изобразить ученых точками, а темы их переписки — цветами отрезков (один цвет для первой темы, а второй — для другой), то доказанное выше утверждение можно сформулировать следующим образом.

Если 6 точек соединены попарно отрезками, окрашенными в два различных цвета, то найдутся 3 точки, являющиеся вершинами одноцветного треугольника.

Мы могли бы окрашивать отрезки не в 2, а, скажем, в 3 различных цвета. В этом случае пришлось бы взять больше точек — не 6, а 17. Например, *если 17 ученых переписываются друг с другом по трем различным научным темам, причем каждая пара ученых ведет переписку лишь по одной теме, то всегда найдутся трое ученых, переписывающихся по одной и той же теме.*

В самом деле, каждый ученый ведет переписку с 16 другими. Поэтому для ученого A найдутся еще 6 человек, с которыми он переписывается на одну и ту же тему. Если хотя бы одна пара из этих 6 переписывается друг с другом на ту же тему, то искомая тройка ученых найдена. Если же они переписываются друг с другом лишь по двум оставшимся темам, то, по доказанному выше, среди них найдутся трое, переписка которых посвящена одной теме.

Читатель легко найдет теперь для любого числа тем такое количество ученых, что при любом распределении тем между ними можно выбрать тройку, переписывающуюся по одному и тому же вопросу. Но это утверждение можно обобщить еще дальше, разыскивая не тройки, а, скажем, четверки ученых. В этом случае при переписке по двум темам достаточно взять 18 ученых, чтобы из них можно было выделить четверку ученых с общей тематикой переписки. А 17 ученых уже недостаточно: возьмем 17 ученых, занумеруем их числами от 1 до 17 и отдадим первую тему парам ученых (i, j), для которых $|i - j|$ равно одному из чисел 1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 17, а вторую тему — остальным парам ученых. Сделайте рисунок и убедитесь, что ни одна четверка ученых не ведет переписку по общей теме.

Но путь обобщений еще не закончен. Ведь можно придать темам различный вес и искать, например, для первой темы четверки ученых, а для второй — тройки ученых. Тогда необходимое число окажется больше 6, но меньше 18 — оно равно 9. Кроме того, ученых можно разбивать не на пары, а на коллективы из большего числа участников и закреплять тему за каждым таким коллективом.

Тогда данная пара ученых может, например, обсуждать первую тему в одном коллективе, а вторую — в другом.

Английский математик Рамсей доказал общую теорему. Она утверждает, что *если заданы число тем m и число участников в каждом коллективе r и если теме с номером k сопоставлено число p_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, то при достаточно большом числе участников и любом распределении тем между коллективами можно найти тему с номером k и p_k ученых, любые r из которых заняты этой темой.*

Выбор представителей

Студенты Петя Соболев, Леня Комаров, Витя Егоров, Сережа Смирнов, Коля Токарев и Левон Арутюнян были закадычными друзьями. Многими делами они занимались сообща: Петя и Витя вместе работали над изобретением, Леня и Сережа вместе писали реферат по философии, Петя, Леня и Коля вместе занимались в секции самбо, Витя и Коля вместе организовывали математическую олимпиаду в институте, а Коля и Левон шефствовали над одной из групп первого курса. Все шло хорошо, но однажды друзья стали в тупик — выяснилось, что в 15 часов 00 минут нужно делать доклад об изобретении, прийти на консультацию к преподавателю философии, хотя бы одному выступить на соревнованиях по самбо, принять участие в отборе задач для олимпиады и провести собрание в подшефной группе. Ведь если Петя будет докладывать об изобретении, Леня пойдет на консультацию, Коля будет отбирать задачи, а Левон проведет собрание, то на соревнования по самбо никто пойти не сможет — ни Витя, ни Сережа ни разу этим видом спорта не занимались.

Но Витя и Коля не зря интересовались математикой, и после некоторых размышлений они придумали такой план: об изобретении доложит Петя, на консультацию пойдет Леня, на соревнования по самбо — Коля, задачи будет отбирать Витя, а собрание проведет Левон. Положение друзей было бы куда хуже, если бы над изобретением работали Петя и Витя, реферат писали Витя и Сережа, в секции самбо занимались Петя и Сережа, математическую олимпиаду организовывали Петя, Витя и Сережа, а шефствовали Леня, Коля и Левон. В этом случае первыми четырьмя делами занимались бы всего трое друзей, и принцип Дирихле не позволил бы им так распределить обязанности, что все дела были бы сделаны.

Нетрудно сообразить, в чем заключается необходимое условие того, чтобы можно было распределить дела между нашими друзьями — любыми k делами должны заниматься по крайней мере k человек. Оказывается, что это условие не только необходимо, но и достаточно — если оно выполнено, то требуемое распределение обязанностей всегда возможно.

В общем виде это утверждение формулируется так. *Пусть в каком-нибудь множестве X выделены подмножества $X_1, \ldots, X_n$. Для того чтобы в X можно было выбрать n различных элементов $a_1, \ldots, a_n$ таких, что $a_1 \in X_1, \ldots, a_n \in X_n$, необходимо и достаточно выполнение следующего условия: объединение любых k заданных подмножеств должно содержать по крайней мере k элементов.*

Эту теорему, доказанную английским математиком Ф. Холлом, называют **теоремой о различных представителях** или **теоремой о деревенских свадьбах**. Последнее название ведет свое происхождение от формулировки, восходящей к известному немецкому математику Герману Вейлю.

В деревне относительно каждого юноши и девушки известно, дружат они или нет. Если для любых k юношей объединение множеств их подруг содержит по крайней мере k девушек, то каждый юноша может выбрать себе жену из числа своих подруг (в этой задаче X — множество всех девушек, $X_1, \ldots, X_n$ — подмножества, состоящие из подруг первого, второго, ..., n-го юноши).

Докажем теорему в формулировке Г. Вейля, проведя индукцию по числу юношей. Пусть число юношей равно n. При $n = 1$ все очевидно — в силу условия теоремы у одного юноши есть хотя бы одна подруга и он может выбрать себе жену. Предположим, что теорема доказана для любого числа юношей, меньшего n. Возьмем n юношей, причем будем считать, что множества их подруг удовлетворяют условию теоремы — объединение множеств подруг любых k юношей состоит по крайней мере из k девушек. Тогда возможны два случая:

а) найдется множество, состоящее из r юношей, где $r < n$, для которых объединение множеств их подруг содержит r девушек. Если бы девушек было хотя бы на одпу меньше, условие теоремы нарушилось бы. Поэтому такую совокупность юношей и девушек называют «критической». Внутри этого критического множества выполнено условие теоремы — юноши этого множества имеют подруг лишь среди девушек того же множества, а потому из выполнения условия для всех юношей и девушек вытекает, что оно верно и при ограничении этим множеством. Но тогда можно найти жен для всех юношей из критического множества, выбирая их из того же множества так, чтобы каждый юноша получил в жены одну из своих подруг. Поскольку с этими юношами все в порядке, устраним их и выбранных ими жен из рассмотрения и возьмем оставшихся $n - r$ юношей. Легко видеть, что для них тоже выполняется условие теоремы (если бы для каких-нибудь s юношей объединение множеств их подруг содержало меньше, чем s девушек, то для множества, состоящего из этих s юношей и r юношей из критического множества, тоже нарушалось бы условие теоремы). Значит, по предположению индукции, можно найти жен и для этих $n - r$ юношей. А тогда все юноши нашли жен, и в этом случае теорема доказана;

б) теперь рассмотрим случай, когда критических множеств нет — при $r < n$ для любых r юношей объединение множеств их подруг содержит по крайней мере $r + 1$ девушек. Тогда возьмем любого юношу, женим его на одной из его подруг и устраним счастливую пару из рассмотрения. Остается $n - 1$ юношей, причем для них условие теоремы выполняется. В самом деле, возьмем любых r из оставшихся юношей. Объединение множеств их подруг состояло по крайней мере из $r + 1$ девушек. Значит, и после удаления новобрачной, это множество состоит по крайней мере из r девушек. Но тогда можно выбрать жен для этих $n - 1$ юношей, чем и заканчивается доказательство теоремы о деревенских свадьбах.

Серьезному читателю, недовольному тем, что в столь важной теореме мы говорим о матримониальных отношениях, предоставляем провести это доказательство, заменив слово «девушки» словами «элементы множества», а слово «юноши»— словом «подмножества»; вместо того чтобы говорить «юноша дружит с девушкой», придется говорить «элемент принадлежит подмножеству», а вместо «юноша женился на девушке»—«в подмножестве выбран элемент». А все остальное остается по-прежнему.

Теорема, которую мы сейчас доказали, относится к разряду так называемых «теорем существования», утверждающих, что нечто (в нашем случае — подбор невест) существует, но дающих мало информации о том, как это нечто найти (в нашем случае — как конкретно организовать свадьбы или выбор представителей). Ведь если буквально следовать доказательству теоремы, то надо сначала перебрать все подмножества в множестве юношей и посмотреть, нет ли среди них критических. А в следующей главе будет доказано, что число подмножеств в множестве из n элементов равно 2^n, так что уже при 20 юношах число подмножеств будет больше миллиона и придется прибегнуть к услугам электронной свахи.

А если учесть, что с подобными задачами приходится иметь дело в куда более серьезных вопросах, чем деревенские свадьбы (например, при распределении работ между станками, организации транспортных потоков и т. д.), то становится ясно, насколько желателен алгоритм, позволяющий осуществлять выбор представителей, а в случае, когда он невозможен, указывающий наибольшее число возможных выборов (например, устройство максимального числа свадеб).

Один из путей решения основан на использовании *графов* — множеств, состоящих из конечного числа точек, некоторые пары которых соединены дугами (такие графы называются *неориентированными*; если вместо дуг рисовать стрелки, то получится *ориентированный* граф, или, короче, *орграф*). Начертим такой граф: в одном столбце поставим точки, изображающие подмножества $X_1, \ldots, X_n$, а во втором — точки, изображающие элементы всего множества X. Каждую точку, изображающую подмножество, соединим дугами со всеми входящими в него элементами. Например, распределение друзей, о котором говорилось в предыдущем пункте, изображено на рис. 12.

Предположим, что мы каким-то образом назначили представителей некоторых подмножеств, т. е. выбрали некоторые дуги нашего графа. Пометим эти дуги знаком «плюс». Разумеется, две помеченные дуги не могут иметь общих концов, иначе мы либо выбрали бы в одном множестве двух представителей, либо один элемент представлял бы два разных множества. Если в результате оказалось, что из каждого подмножества выходит помеченная дуга, то все в порядке — все подмножества получали представителей. В противном случае берем все подмножества, лишенные представительства, и помечаем их цифрой 1. Все элементы, к которым идут дуги из помеченных цифрой 1 подмножеств, отметим цифрой 2. Если хотя бы один из этих элементов свободен, т. е. не является ничьим представителем, то назначаем его представителем того подмножества, от которого к нему шла дуга и тем самым увеличим число представленных подмножеств.

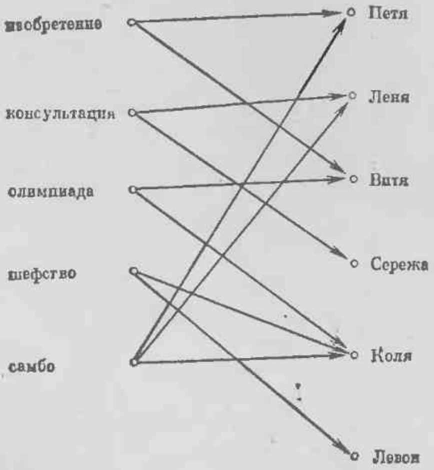
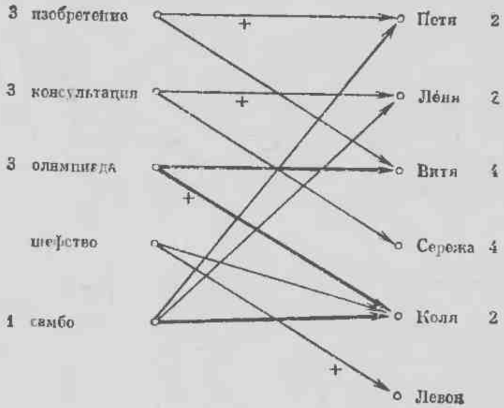


Рис. 12.

Сложнее обстоит дело, если среди помеченных цифрой 2 элементов нет свободных — все они уже кого-нибудь представляют. В этом случае придется менять ранее принятые решения и делать перестройку, высвобождая эти элементы. Заметим, что при таком предположении все элементы, помеченные цифрой 2, являются концами дуг с пометкой плюс, и мы можем по таким дугам вернуться от этих элементов в столбец подмножеств. Подмножества, к которым мы вернемся, пометим цифрой 3, а все элементы, к которым идут не отмеченные знаком «плюс» дуги из помеченных цифрой 3 подмножеств, отметим цифрой 4. Дальше по отмеченным знаком «плюс» дугам вернемся в столбец подмножеств и пометим их цифрой 5, а затем по всем неотмеченным дугам, начинающимся в подмножествах с пометкой 5, перейдем к элементам множества и пометим их цифрой 6 (при этом одно и то же подмножество или один и тот же элемент могут иметь несколько пометок).

Будем продолжать описанный выше процесс до тех пор, пока в столбце элементов мы не наткнемся на свободный элемент. Тогда у нас получится «молния», начинающаяся с подмножества, помеченного цифрой 1 (т. е. еще не имеющего представителя) и кончающаяся свободным элементом (рис. 13). Дуги этой «молнии» через одну помечены знаками «плюс». А теперь изменим пометки этих

Рис. 13.



дуг — все непомеченные дуги молнии пометим знаком «плюс», и сотрем все бывшие ранее на ней знаки «плюс». Нетрудно видеть, что в результате этой операции число представленных подмножеств увеличилось на единицу — оказалось представленным подмножество, с которого начинается молния. Если и теперь не все подмножества имеют представителей, то повторим этот процесс. В конце концов произойдет одно из двух: либо все подмножества получат представителей, либо после одного из циклов пометок число помеченных элементов не увеличится. Во втором случае задача о различных представителях оказывается неразрешимой, и мы лишь получаем наибольшее число представленных подмножеств. Разумеется, если выполнено условие теоремы о различных представителях, то второй случай невозможен.

Отметим изящное достаточное условие разрешимости задачи о назначении представителей.

Если существует такое число k, что каждое подмножество из числа $X_1, \ldots, X_n$ содержит ровно k элементов, а каждый элемент из множества X принадлежит ровно k подмножествам, то можно назначить различных представителей.

Общие представители

Каждый студент группы участвовал в одной из 5 спортивных секций. А на летние каникулы каждый из них вошел в один из 5 студенческих строительных отрядов. Однажды на заседании факультетского бюро ВЛКСМ стояли вопросы о спортивной работе и о работе студенческих спортивных отрядов. Можно ли послать 5 делегатов от этой группы так, чтобы они представляли и все спортивные секции и все строительные отряды?

Разумеется, в столь общей постановке задача неразрешима — иногда можно послать, иногда и нельзя. Поэтому надо найти условия, при которых такой выбор делегации возможен. Если, например, участники волейбольной и шахматной секций целиком входят в первый отряд, то представитель этого отряда сможет говорить либо о шахматах, либо о волейболе, но не об обеих играх сразу. Этот пример показывает, в чем заключается необходимое условие возможности требуемого выбора: никакие k спортивных секций не могут входить в объединение менее чем k строительных отрядов. Оказывается, это условие является и достаточным. Сформулируем его так.

Пусть студенческая группа разбита на n спортивных секций $A_1, \ldots, A_n$ и n строительных отрядов $B_1, \ldots, B_n$. Для того чтобы можно было выбрать n студентов так, чтобы каждая спортивная секция и каждый строительный отряд имели представителей, необходимо и достаточно, чтобы никакие k спортивных секций не входили в объединение менее чем k строительных отрядов.

Доказательство этого утверждения сводится к использованию теоремы о различных представителях.

Отметим одно достаточное условие для возможности назначить общих представителей: *если множество из kp элементов разбито двумя способами на k подмножеств, содержащих по p элементов, то для этих двух разбиений можно выбрать систему общих представителей.*

В начале XVIII в. была весьма популярна головоломка о кенигсбергских мостах. В городе Кенигсберге (ныне Калининграде) было два острова, соединенных семью мостами с берегами реки Прегеля (ныне Преголь) и между собой так, как показано на рис. 14. Задача состояла в отыскании маршрута прогулки, начинавшейся и кончавшейся в одном и том же месте, причем требовалось ровно один раз пройти каждый мост. Все попытки найти подбором

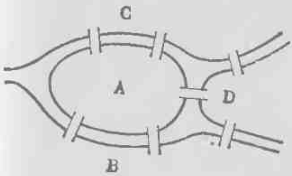


Рис. 14.

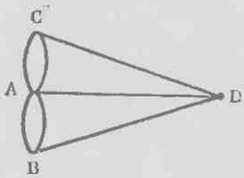


Рис. 15.

такой маршрут кончались неудачей. Причину этих неудач выяснил в 1736 г. Эйлер, указавший общие условия разрешимости или неразрешимости подобных задач.

Чтобы прояснить математическую сущность задачи, Эйлер заменил оба острова, а также участки суши по обоим берегам реки, точками, а мосты изобразил линиями, соединяющими эти точки (рис. 15). Теперь задача свелась к следующему. *Имеется несколько точек, некоторые из которых соединены линиями. При каком условии существует маршрут, начинающийся и кончающийся в одной и той же точке и проходящий один и только один раз по каждой линии?*

Очевидны два необходимых условия разрешимости этой задачи: во-первых, система точек и линий не должна распадаться на несколько отдельных частей (или, как говорят, она должна быть связной), а во-вторых, из каждой точки должно выходить четное число линий. В самом деле, при обходе маршрута мы должны столько же раз войти в каждую точку, сколько раз из нее выходим, так как иначе в этой точке маршрут прервется. Поскольку это условие не выполняется для схемы на рис. 15, то решить задачу о мостах невозможно. Невозможно найти и маршрут, проходящий по всем мостам, даже если снять требование начинать и кончать его в одной и той же точке. В этом случае из двух точек (начала и конца маршрута) может выходить нечетное число линий. Но на рис. 15 не две, а четыре такие точки, а потому и эта задача неразрешима.

Сформулированное выше необходимое условие является и достаточным: *если в системе точек и линий из каждой точки выходит четное число линий, причем эта система связна, то можно обойти все линии, начав и кончив маршрут в одной точке и пройдя каждую линию лишь один раз.*

В самом деле, выйдем из какой-нибудь точки A и будем идти до тех пор, пока это возможно. Так как из каждой точки выходит четное число линий, то попав в какую-нибудь точку, мы можем из нее и выйти. Единственным исключением является исходная точка, в которой и закончится наш маршрут. Однако может случиться, что этот маршрут прошел лишь по части линий. Тогда, стерев пройденные линии, мы получим новую систему, в которой из каждой точки выходит четное число линий. Поэтому и в новой системе есть замкнутый маршрут, выходящий, например, из точки B старого маршрута. Тогда выйдем из точки A, пройдем по старому маршруту до точки B. От точки B пройдем новый замкнутый маршрут, а затем пойдем дальше по старому пути, пока не закончим его в точке A. Таким образом исходный маршрут оказался расширенным. Повторяя такие расширения, мы получим в конце концов замкнутый маршрут, проходящий через все линии системы. Таким же образом разбирается случай, когда имеются две точки, из которых выходит нечетное число линий.

Системы точек и линий, аналогичные рассмотренным выше, встречаются во многих областях математики и ее приложений — в физике, химии, электронике, теории связи, генетике, психологии, экономике, лингвистике и т. д. Они получили особое название «графы». В настоящее время теория графов является одной из стремительно развивающихся областей математики

Кругосветное путешествие

В 1859 г. королевский астроном Ирландии сэр Вилльям Роуэн Гамильтон, известный своими глубокими исследованиями по математической физике, теоретической механике и открытием исчисления кватернионов, придумал игру «Кругосветное путешествие» и продал свою идею за 25 гиней фабриканту игрушек. Утверждают, что эта сумма была единственным заработком, полученным Гамильтоном за свои математические открытия. В этой игре требовалось найти путь, проходящий через все вершины графа, изображенного на рис. 16, так, чтобы побывать в каждой вершине лишь один раз и вернуться назад (в вершинах были написаны названия городов). На рис. 16 показан один из гамильтоновых путей. Такие пути существу-

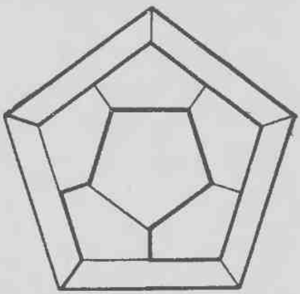


Рис. 16.

ют далеко не для всех графов. Однако в отличие от задачи Эйлера до сих пор неизвестны необходимые и достаточные условия для существования гамильтонова пути на графе. Необходимым является отсутствие в графе точек, удаление которых привело бы к его распадению на две части — если бы в нем были такие точки, то мы должны были бы при обходе побывать в них по крайней мере дважды. Доказано, что если граф без разбивающих точек не имеет гамильтонова пути, то он содержит часть, состоящую из двух точек и трех соединяющих их линий.

Четыре краски

Многие математические задачи формулируются настолько просто, что их содержание можно объяснить любому школьнику, однако решение этих задач до сих пор неизвестно. Наряду с проблемой Ферма самой знаменитой из них является проблема четырех красок, остающаяся нерешенной более ста лет. Она формулируется следующим образом.

Доказать, что любую карту на плоскости можно раскрасить четырьмя красками так, чтобы никакие две смежные страны не были покрашены в один цвет. При этом каждая страна должна состоять из одной связной области, а две страны считаются смежными, если они имеют общую границу в виде линии (а не только нескольких точек).

Справедливость сформулированной гипотезы доказана для всех карт, содержащих менее 40 стран. Для любой карты доказана возможность раскрасить ее требуемым образом пятью красками.

Если изобразить каждую страну точкой, а страны, имеющие общую границу, соединить линией, то получим граф, и задача будет идти о раскраске вершин этого графа четырьмя красками так, чтобы две смежные вершины оказались покрашенными в разные цвета.

Задачи к главе II

1. Из шахматной доски вырезаны две угловые клетки, расположенные на одной диагонали. Можно ли замостить эту доску прямоугольниками, размер которых равен двум клеткам?

2. Из шахматной доски удалены две клетки разного цвета. Докажите, что оставшуюся доску можно замостить такими прямоугольниками, как в задаче 1.

3. Назовем «тримино» (1×3)-прямоугольник. С помощью 21 тримино можно покрыть 63 поля шахматной доски. Какое поле может при этом остаться свободным?

4. На шахматной доске с 10 горизонталями и 10 вертикалями выберите наименьшее число полей так, чтобы на оставшуюся часть доски нельзя было поставить прямоугольник размером 1×4.

5. Во всех клетках шахматной доски расставлены натуральные числа. Можно выделить квадрат размером 3×3 или 4×4 и увеличить в нем все числа на 1. Можно ли цепочкой таких операций добиться того, чтобы все числа во всех клетках доски делились на 10?

6. В клетках $(n \times n)$-таблицы расставлены числа, причем для любого поля сумма чисел в проходящих через него горизонтали и вертикали не меньше s. Какое наименьшее значение может иметь сумма всех чисел таблицы?

7. Сколько среди километровых столбов $0 \cdot 999$, $1 \cdot 998$, $2 \cdot 997$, . . ., $998 \cdot 1$, $999 \cdot 0$ таких, что на них только две различные цифры?

8. Докажите, что из конечного числа различных кубиков нельзя сложить прямоугольный параллелепипед.

9. Сторона куба равна 3 *см*. Найти наименьшее количество распилов, которые нужно сделать, чтобы распилить его на 27 кубиков со стороной 1 *см* (части куба после распиливания можно перекладывать).

10. Длины сторон прямоугольного параллелепипеда выражаются целыми числами a, b, c, такими, что

$$2^{\alpha-1} \leqslant a < 2^{\alpha},\ 2^{\beta-1} \leqslant b < 2^{\beta},\ 2^{\gamma-1} \leqslant c < 2^{\gamma}.$$

Докажите, что наименьшее число распилов, необходимых для распиливания этого параллелепипеда на единичные кубики, равно $\alpha + \beta + \gamma$ (части можно перекладывать после каждого распила).

11. Поменяйте местами белых и черных коней на рис. 17, делая поочередно ходы белыми и черными.

12. Шахматную доску с 3 горизонталями и 3 вертикалями обходят ладьей и по пути ее следования пишут одно за другим числа

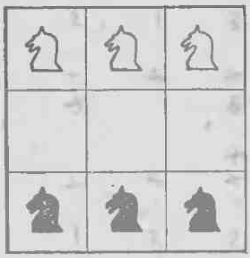


Рис. 17.

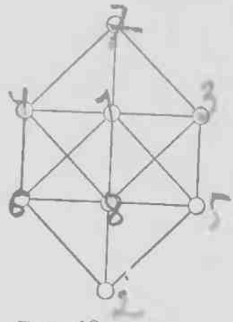


Рис. 18.

1, 2, . . ., 9. Найдите путь ладьи, при котором трехзначное число, получившееся в третьей горизонтали, равно сумме трехзначных чисел, получившихся в первых двух горизонталях.

13. Расставьте в кружки числа 1, 2, 3, . . . , 8 (рис. 18) так, чтобы два последовательных числа не оказались в кружках, соединенных отрезком.

14. Поставьте на шахматную доску 5 ферзей так, чтобы они держали под ударом все ее поля.

15. Поставьте на шахматную доску 8 фигур (короля, ферзя, двух ладей, двух слонов, двух коней) так, чтобы они держали под ударом наибольшее число полей.

16. Докажите, что максимальное число слонов, которые можно поставить на $(n \times n)$-доску так, чтобы они не били друг друга, равно $2n - 2$.

17. Докажите, что максимальное число королей, которые можно поставить на $(n \times n)$-доску так, чтобы они не били друг друга, равно $n^2/4$, если n четно, и $(n + 1)^2/4$ если n нечетно.

18. Какое наименьшее число слонов надо поставить на шахматную доску, чтобы они держали под боем каждое поле доски и каждый слон был защищен другим?

19. Расставьте на шахматной доске наименьшее число ладей так, чтобы каждое поле было бито по крайней мере два раза. Решите задачу в двух вариантах: а) считая, что ладья не бьет полей, заслоненных от нее другими ладьями, б) считая, что она бьет такие поля.

20. Какое наибольшее число дамок можно поставить на черные поля шахматной доски так, чтобы каждую дамку могла снять хотя бы одна из остальных дамок?

21. Какое наименьшее число коней нужно расставить на шахматной доске, чтобы все поля были под ударом (поле, где стоит конь, считается под ударом).

22. Докажите, что среди 9 человек есть либо 3 попарно знакомых, либо 4 попарно незнакомых.

23. В каждую из 16 клеток (4×4)-доски вписывается одно из чисел 1, 2, 3, 4, 5 так, что ни на одной горизонтали и ни на одной вертикали нет повторяющихся чисел. Найдите расположение с этим свойством, при котором сумма всех чисел на доске наибольшая (она равна 50).

24. Из числа 123456789101112 13...9899100 вычеркните 100 цифр так, чтобы оставшееся число было а) наибольшим, б) наименьшим (записи, начинающиеся с нуля, считаются недопустимыми).

25. В сумме $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + (2n - 1)$ вычеркивают $n - 1$ чисел так, что если вычеркнуты числа a и b, то вычеркивается и их сумма. Найти способ вычеркивания, при котором сумма оставшихся чисел наибольшая.

26. Докажите, что из любых 10 различных двузначных чисел можно выбрать две различные группы чисел, имеющие одинаковую сумму.

27. Имеется лампа с 7 штырьками, расположенными по кругу на одинаковых расстояниях друг от друга, и розетка с 7 гнездами, также расположенными на равном расстоянии друг от друга. Занумеруйте штырьки и гнезда цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 так, чтобы при любом втыкании лампы в розетку хотя бы один штырек попал в гнездо с тем же номером.

28. В шести секторах круга расставлено 6 шашек по одной в каждом секторе. Одним ходом разрешается любые две шашки передвинуть в соседние секторы так, что одна движется по часовой стрелке, а другая — против часовой стрелки. Можно ли собрать такими ходами все шашки в одном секторе?

29. На окружности в произвольном порядке выписаны 4 единицы и 5 нулей. Затем в промежутке между одинаковыми числами пишется 1, а между разными — 0, после чего первоначальные цифры стираются. Докажите, что, повторяя этот процесс, мы никогда не получим набор из 9 единиц.

30. Даны 20 попарно неравных натуральных чисел, меньших, чем 70. Докажите, что среди попарных разностей этих чисел найдутся 4 одинаковых.

31. Из двухсот чисел 1, 2, . . ., 200 выбрали одно число, меньшее 16 и еще 99 других чисел. Докажите, что среди выбранных ста чисел есть два, из которых одно делится на другое.

32. Докажите, что из 981 чисел, не превосходящих 1958, можно выбрать три таких числа, что сумма двух из них равна третьему. Верно ли это утверждение для 980 чисел?

33. Докажите, что из любой перестановки чисел 1, 2, . . ., 101 можно выбрать 11 чисел, идущих или в порядке возрастания, или в порядке убывания.

34. Докажите, что из любых ста целых чисел можно выбрать одно или несколько так, чтобы сумма выбранных чисел оканчивалась двумя нулями.

35. Отрезок длины 3^n разбивают на 3 равные части. Первая и третья части называются отмеченными. Каждая отмеченная часть снова разбивается на 3 равные части, из которых отмечают первую и третью. Это продолжается до тех пор, пока не получатся отрезки длины 1. Концы всех отмеченных отрезков называются отмеченными точками. Докажите, что для любого k, $1 \leqslant k \leqslant 3^n$ можно найти две отмеченные точки, расстояние между которыми равно k.

36. Пусть M — магический квадрат порядка n, составленный из чисел $1, 2, 3, \ldots, n^2$. Обозначим через M_k магический квадрат, получаемый из M заменой каждого числа m на $m + (k-1) n^2$. Докажите, что, заменив каждое число k на магический квадрат M_k, получим магический квадрат порядка n^2.

37. Докажите, что 77 телефонов нельзя соединить друг с другом так, чтобы каждый был соединен ровно с 15 другими.

38. На международном научном конгрессе некоторые участники обменялись рукопожатиями. Докажите, что число участников, сделавших нечетное число рукопожатий, четно.

39. Имеется несколько натуральных чисел, каждое из которых не больше, чем n. При любом разбиении этих чисел на две группы сумма чисел хотя бы в одной группе не превышает n. Найдите наибольшее значение суммы всех чисел.

40. Квадратная $(n \times n)$-таблица заполнена числами от 1 до n так, что в каждой строке и каждом столбце встречаются по одному разу все числа от 1 до n. Докажите, что если n — нечетное число, а таблица симметрична относительно одной из диагоналей, то на этой диагонали по одному разу стоят все числа от 1 до n.

41. На бесконечной шахматной доске стоит конь. Найдите все поля, на которые он может попасть за $2n$ ходов.

42. n точек соединены отрезками так, что каждая точка соединена хотя бы с одной точкой, причем нет двух точек, таких, что от одной можно перейти к другой двумя путями из этих отрезков. Докажите, что число отрезков равно $n - 1$.

43. В клубе на танцевальном вечере находились юноши и девушки, причем каждый юноша был знаком не менее чем с m девушками, а каждая девушка — не более чем с m юношами. Докажите, что каждый юноша может пригласить на танец знакомую девушку.

44. Докажите, что если в некотором множестве параллельно расположенных прямоугольников нельзя указать более n попарно непересекающихся прямоугольников, то существует $n(n+1)/2$ точек, таких, что каждый прямоугольник содержит хотя бы одну из них.

45. Собралось $2n$ человек, каждый из которых знаком не менее чем с n присутствующими. Докажите, что из них можно выбрать четырех человек и посадить за круглый стол так, что каждый из выбранных будет сидеть рядом со своими знакомыми.

46. При дворе короля Артура собрались $2n$ рыцарей, причем каждый из них имеет среди присутствующих не более $n - 1$ врагов. Докажите, что колдун Мерлин может так рассадить рыцарей за круглым столом, что ни один из них не будет сидеть рядом со своим врагом.

47. По кругу выписаны p «плюсов» и k «минусов». Пусть t — число пар рядом стоящих «плюсов», а m — число пар рядом стоящих «минусов». Докажите, что $p - k = t - m$.

48. Во время перемирия за круглым столом разместились рыцари двух враждующих сторон. Оказалось, что число рыцарей, справа от которых сидит враг, равно числу рыцарей, справа от которых сидит друг. Докажите, что общее число рыцарей делится на 4.

49. В городе Лиссе 10 000 телефонов, номера которых четырехзначны (от 0000 до 9999). В центральном районе установлено более половины всех телефонов. Докажите, что хотя бы один из номеров центральных телефонов равен сумме номеров двух других центральных телефонов.

50. Имеется $2k+1$ карточек, занумерованных последовательными натуральными числами от 1 до $2k+1$. Какое наибольшее число карточек можно выбрать так, чтобы ни один из извлеченных номеров не был равен сумме двух других извлеченных номеров?

51. На шахматной доске с 25 горизонталями и 25 вертикалями расположено 125 шашек по 5 шашек на каждой горизонтали, причем расположение симметрично относительно главной диагонали. Докажите, что хотя бы одна шашка стоит на главной диагонали.

52. Сеть метро имеет на каждой линии не менее 4 станций, из них не более 3 пересадочных. Ни на какой пересадочной станции не пересекается более двух линий. Какое наибольшее число станций может иметь такая сеть, если с любой станции можно проехать на другую, сделав не более двух пересадок?

53. В некотором городе для любых трех перекрестков A, B, C есть путь, ведущий из A в B и не проходящий через C. Докажите, что с любого перекрестка на любой другой ведут по крайней мере два непересекающихся пути.

54. Сеть автобусных маршрутов в городе устроена так, что

а) на каждом маршруте имеется k остановок;

б) любые два маршрута либо не имеют общих остановок, либо имеют только одну общую остановку;

в) число всех остановок равно k^2.

Укажите верхнюю границу для числа различных маршрутов.

55. В Швамбрании имеется 20 крупных городов, связанных между собой воздушным сообщением. При этом:

а) все рейсы беспосадочные: самолет поднимается в пункте отправления и впервые опускается в пункте назначения;

б) из каждого города можно попасть (возможно, с пересадками) в любой другой город;

в) если отменить хотя бы один маршрут, условие б) перестает выполняться.

Найдите наименьшее и наибольшее число рейсов при выполнении этих условий.

56. Автобусная сеть города устроена следующим образом:

а) с любой остановки можно попасть на любую другую без пересадки;

б) для любой пары маршрутов найдется и притом единственная остановка, на которой можно пересесть с одного из этих маршрутов на другой;

в) на каждом маршруте ровно n остановок.

Сколько автобусных маршрутов в городе?

57. В городе насчитывается 57 автобусных маршрутов, таких, что

а) с любой остановки можно без пересадки попасть на любую другую;

б) для любой пары маршрутов найдется, и притом только одна, остановка, на которой можно пересесть с одного из этих маршрутов на другой;

в) на каждом маршруте не менее трех остановок.

Сколько остановок имеет каждый из 57 маршрутов?

58. Можно ли провести в городе 10 автобусных маршрутов и установить на них остановки так, что какие бы 8 маршрутов ни были взяты, найдется остановка, не принадлежащая ни одному из этих маршрутов, а любые 9 маршрутов проходят через все остановки?

59. Квадрат разделен на 16 равных квадратов. Сколькими способами можно раскрасить их в белый, черный, красный и синий цвета так, чтобы в каждом горизонтальном и каждом вертикальном ряду были все четыре цвета?

60. Пять человек играют несколько партий в домино (двое на двое), причем каждый играющий имеет каждого один раз своим партнером и два раза своим противником. Найдите количество сыгранных партий и все способы распределения играющих.

61. Имеется 1958 точек. Какое наибольшее число троек можно выбрать так, чтобы любые две тройки имели ровно одну общую точку?

62. Собралось n человек. Некоторые из них знакомы друг с другом, причем каждые два незнакомых имеют ровно двух общих знакомых, а каждые два знакомых не имеют общих знакомых. Докажите, что каждый присутствующий знаком с одинаковым количеством человек.

63. Горизонтали шахматной доски обозначаются, как обычно, цифрами от 1 до 8, а вертикали — буквами от a до h. Пусть теперь a, b, c, d, e, f, g, h — произвольные числа. Напишем на каждом поле произведение чисел, означающих соответствующие горизонталь и вертикаль, и расставим произвольным образом 8 ладей так, чтобы они не били друг друга. Найдите произведение чисел, закрытых этими ладьями.

64. Имеется кусок цепи из 60 звеньев. Каждое звено весит 1 *г*. Какое наименьшее число звеньев надо расковать, чтобы с помощью раскованных звеньев можно было получить любой вес, выражающийся целым числом от 1 до 60? Решите ту же задачу, если для взвешивания можно пользоваться двухчашечными весами.

65. Докажите, что, расковав n звеньев цепи длиной в $(n + 1)\,2^{n+1} - 1$ звеньев, можно получить любой вес от 1 до $(n + 1)\,2^{n+1} - 1$ (вес одного звена равен 1 *г*).

66. Натуральные числа от 1 до n располагаются на окружности. Это расположение назовем n-цепочкой. Можно ли найти $E\,(n - 1/2)$ [1] таких цепочек, что два числа, соседние в одной из них, не являются соседними ни в какой другой?

67. Девять человек разбиваются на 3 тройки четырьмя различными способами. Докажите, что их можно разбивать так, чтобы никакие два человека не попали дважды в одну тройку.

---

[1] $E(\alpha)$ — целая часть α.

68. Докажите, что если изображенная на глобусе карта такова, что, двигаясь по границам стран, можно обойти все вершины (точки, в которых сходятся три или более стран) и вернуться в исходную точку, то все страны на карте можно закрасить 4 красками так, чтобы никакие две соседние страны не были окрашены одной краской.

69. Имеется 10 белых и 10 черных кеглей. Можно ли выбрать из них 10 кеглей и составить равносторонний треугольник так, чтобы в нем не было частичных равносторонних треугольников с одноцветными вершинами?

70. Шесть точек расположены в пространстве так, что никакие три из них не лежат на одной прямой, а никакие четыре — в одной плоскости. Докажите, что при любом способе попарного соединения этих точек и раскрашивания получившихся отрезков в два цвета найдется одноцветный треугольник.

71. На $(n \times n)$-доске вырезали одну угловую клетку. Можно ли заполнить полученную фигуру с помощью домино (прямоугольников 1×2) так, чтобы число горизонтально и вертикально расположенных домино было одинаковым?

72. Грани кубика занумерованы числами 1, 2, 3, 4, 5, 6 так, что сумма номеров на его противоположных гранях равна семи. Кубик катят из левого нижнего в правый верхний угол доски 50×50 (каждая клетка равна грани кубика) так, что он каждый раз переваливается через свое ребро на соседнюю клетку; при этом разрешается двигаться только вправо или вверх. На каждой из клеток по пути кубика пишется номер грани, которая опиралась на эту клетку. Какое наибольшее значение может иметь сумма всех 99 выписанных чисел? Какое наименьшее?

73. Можно ли выписать девять чисел 1, 2, . . ., 9 по кругу так, чтобы сумма никаких двух соседних чисел не делилась ни на 3, ни на 5, ни на 7?

74. Дно прямоугольной коробки выложено плитками размера 2×2 и 1×4. Докажите, что если заменить одну плитку 2×2 на плитку 1×4, то новыми плитками замостить дно коробки не удастся.

75. В множестве, состоящем из n элементов, выбрано 2^{n-1} подмножеств, каждые три из которых имеют общий элемент. Докажите, что все эти подмножества имеют общий элемент.

76. В городе имеется m жителей. Любые двое из них либо дружат, либо враждуют, причем среди любых троих жителей дружат либо все трое, либо только двое. Докажите, что либо все жители города — друзья, либо найдется горожанин, у которого врагов больше, чем друзей.

77. В городе имеется m жителей. Любые двое из них либо дружат, либо враждуют. Каждый день не более чем один из них может начать новую жизнь: поссориться со всеми друзьями и подружиться со всеми врагами. Известно, что любые три жителя могут подружиться. Докажите, что все жители могут подружиться.

78. N человек не знакомы друг с другом. Докажите, что при любом N можно познакомить некоторых из них так, чтобы ни у каких трех людей не оказалось одинакового числа знакомых.

79. Каждая сторона правильного треугольника ABC разбита на m равных частей. Через точки деления проводят прямые, параллельные сторонам, разбивающие треугольник на m^2 треугольников. Найдите наибольшее значение N, такое, что среди вершин получен-

ных треугольников можно выбрать N точек, никакие две из которых не лежат на прямой, параллельной одной из сторон треугольника ABC.

80. Среди целочисленных неотрицательных решений уравнения $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = m$ требуется выбрать наибольшее число решений так, чтобы в любых двух выбранных решениях каждое неизвестное x_j принимало различные значения.

81. Можно ли расставить цифры 0, 1 и 2 в клетках листа клетчатой бумаги размером 100×100 так, чтобы в каждом прямоугольнике 3×4, стороны которого идут по сторонам клеток, оказалось три нуля, четыре единицы и пять двоек?

82. Четыре числа сложили всеми возможными способами по два и получили следующие шесть сумм: 2, 4, 9, 9, 14, 16. Найдите эти числа.

83. Можно ли расставить 9 чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 по кругу так, чтобы сумма любых трех чисел, стоящих подряд, делилась на 3 и была а) больше 9, б) больше 15?

84. Дано n точек, $n > 4$. Докажите, что их можно соединить стрелками так, что из каждой точки можно попасть в любую другую, пройдя либо по одной стрелке, либо по двум (каждая пара точек соединена лишь одной стрелкой, идти по стрелке можно только в указанном на ней направлении).

85. В магическом квадрате, составленном из чисел $1, 2, 3, \ldots, 16$, числа 1 и 16 стоят в противоположных углах таблицы. Докажите, что сумма любых двух чисел, симметричных относительно центра квадрата, равна 17.

86. Даны числа $1, 2, \ldots, 100$. Найдите наибольшее число m, обладающее свойством: какие бы m из данных чисел ни вычеркнуть, среди оставшихся $100 - m$ чисел найдутся два, из которых одно делится на другое.

87. На прямой линии задана произвольная система отрезков. Обозначим через M наименьшее число точек, таких, что каждый отрезок системы содержит хотя бы одну из этих точек, а через m — наибольшее число попарно непересекающихся отрезков. Докажите, что $m = M$.

88. Между некоторыми из $2n$ городов установлено воздушное сообщение, причем каждый город связан беспосадочными рейсами не менее чем с n другими городами. Докажите, что если даже отменить любые $n - 1$ рейсов, то все равно из любого города можно будет добраться в любой другой (быть может, с пересадками). Найдите все случаи, когда такая «связность» нарушается при отмене n рейсов.

89. Окружность разбита на 5 равных частей точками A_0, A_1, A_2, A_3, A_4. Поставьте около каждой точки число 1 или -1 так, чтобы сумма произведений каждого числа на число, отстоящее от него на k шагов против часовой стрелки при $k = 1, 2, 3, 4$, равнялась -1, 0 или 1. Решите аналогичную задачу в случае, когда окружность разбита на 7, 11 и 13 частей, в каждом случае $k = 1, 2, \ldots, n - 1$.

90. На шахматную доску с m горизонталями и n вертикалями поставлено k ладей. Докажите, что минимальное число линий (горизонталей и вертикалей), содержащих все ладьи, равно максимальному числу ладей, которых можно выбрать из поставленных на доску так, чтобы выбранные ладьи не били друг друга.

91. На окружности взято n точек, часть из которых помечена знаком «плюс», а остальные — знаком «минус». Докажите, что существует не более чем $E((3n+4)/2)$ хорд, соединяющих точки с разными знаками и не пересекающихся внутри окружности.

92. Из 19 шаров 2 радиоактивны. Для любой группы шаров можно с помощью одной проверки установить, есть ли в ней радиоактивный шар. Докажите, что за 7 проверок можно найти оба радиоактивных шара, а за 6 проверок — нельзя.

93. Докажите, что число способов расставить на шахматной доске наибольшее число слонов так, чтобы они не могли взять друг друга, является квадратом некоторого числа.

94. По кругу расположены n чисел, имеющих положительную сумму. Докажите, что среди них найдется такое число, что для любого k, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, сумма выбранного числа и k чисел, идущих за ним по часовой стрелке, положительна.

95. Докажите, что числа $1, 2, \ldots, n^2$ можно так расположить в виде квадратной таблицы, что сумма чисел, стоящих в каждом столбце, одна и та же.

96. Докажите, что 20 взвешиваниями нельзя упорядочить по весу 10 предметов.

97. На доске написаны подряд несколько плюсов и несколько минусов. Разрешается заменить два рядом стоящих знака плюсом, если эти знаки одинаковы, и минусом, если они различны. Докажите, что последний оставшийся знак не зависит от порядка, в котором заменялись знаки.

98. В вершинах правильного семиугольника расставлены черные и белые фишки. Докажите, что найдутся три фишки одного цвета, расставленные в вершинах равнобедренного треугольника. Верно ли аналогичное рассуждение для восьмиугольника? Для каких правильных n-угольников оно верно, а для каких — нет?

99. Из чисел $1, 2, \ldots, k$, $k \geqslant 2$ составляют всевозможные кортежи длины n (относительно определения кортежа см. главу III). Выбраны два подмножества A и B множества всех кортежей (они могут и пересекаться). Любой кортеж из A и любой кортеж из B имеют хотя бы одну одинаковую координату. Докажите, что либо в A, либо в B не более чем k^{n-1} кортежей. Сначала докажите это утверждение для $k=2$ и любого n, затем для $n=1, 2, 3$ и любого k и, наконец, в общем случае.

100. Для каких натуральных чисел a, b, α, β можно $(a \times b)$-прямоугольник разрезать на $(\alpha \times \beta)$-прямоугольники?

101. Докажите, что невозможно занумеровать ребра куба числами $1, 2, 3, \ldots, 12$ так, чтобы для всех вершин сумма номеров выходящих из них трех ребер была одной и той же. Сколькими способами можно осуществить такую нумерацию с помощью чисел $1, 2, \ldots, 6, 8, \ldots, 13$? А с помощью чисел $1, 2, 4, \ldots, 13$? С помощью чисел $1, 2, \ldots, 10, 12, 13$?

102. В трехмерном пространстве 9 точек размещены так, что никакие три не лежат на одной прямой. Каждая точка соединена отрезками в точности с четырьмя другими. Докажите, что всегда найдется хотя бы один треугольник с вершинами в этих точках.

103. В работе международного симпозиума лингвистов участвуют n человек. Из любых четырех хотя бы один может объясниться с любым из трех остальных хотя бы на одном языке. Дока-

жите, что найдется участник симпозиума, который может объясниться с каждым из остальных участников.

104. В соревнованиях по хоккею участвовали пять команд A, B, C, D, E. В конкурсе знатоков один участник предположил, что они займут места в порядке A, B, C, D, E, а другой предсказал порядок D, A, E, C, B. После окончания соревнований оказалось, что первый не угадал ни места хотя бы одной из команд, ни какой-либо пары следующих друг за другом команд. Второй же угадал места двух команд и две пары следующих друг за другом команд. В каком порядке расположились команды?

105. Алфавит состоит из n букв. Какова максимальная длина слова, если в нем рядом стоящие буквы различны и из него нельзя получить вычеркиванием букв слова вида абаб, где а $\neq$ б?

106. Даны два разбиения множества X на непересекающиеся подмножества:

$$X = A_1 \cup \ldots \cup A_l = B_1 \cup \ldots \cup B_m.$$

Каждому элементу $x \in X$ поставим в соответствие пару натуральных чисел $(n(A_i),\ n(B_j))$, если $x \in A_i \cap B_j$. Разбиения называются сопряженными, если различным элементам из X отвечают различные пары чисел. Найдите два сопряженных разбиения множества X из 6 элементов. Существует ли такое разбиение для множества из 5 элементов?

107. n школьников с номерами от 1 до n расположены в порядке возрастания номеров. По команде каждый может либо остаться на месте, либо обменяться с кем-нибудь местами. Можно ли после двух команд получить расположение n, 1, 2, ..., $n - 1$?

108. В вершине A_1 правильного 12-угольника стоит знак минус, а в остальных вершинах — плюсы. Разрешается одновременно менять знак на противоположный в любых шести последовательных вершинах 12-угольника. Докажите, что за любое число таких операций нельзя добиться, чтобы в вершине A_2 оказался знак минус, а в остальных — плюсы. Докажите то же утверждение, если разрешается одновременно менять знаки не в 6, а в 4 (соответственно 3) соседних вершинах многоугольника.

109. Каждое из чисел $x_1, \ldots, x_n$ равно 1 или -1. Известно, что $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_nx_1 = 0$. Докажите, что n делится на 4.

110. На окружности выписаны n чисел, каждое из которых равно 1 или -1, причем для любого $k = 1, 2, \ldots, n - 1$ сумма n попарных произведений чисел, отстоящих друг от друга на k мест, равна нулю. Докажите, что n — квадрат некоторого числа.

111. Куб с ребром длины n разбит на n^3 единичных кубиков. Обозначим через A_n наименьшее количество «трехмерных ладей», которые держат под ударом все кубики. Докажите, что при четном n имеем $A_n = n^2/2$, а при нечетном n имеем $A_n = (n^2 + 1)/2$.

112. Найти наибольшее число ладей, которые можно поставить в кубе из задачи 111, так чтобы они не били друг друга.

113. Имеется группа переводчиков, в которой каждый из трех языков знают ровно $2n$ человек. Докажите, что для любого $k \leqslant n$ из них можно выбрать подмножество, в котором каждый язык знают ровно $2k$ человек.

114. Сколькими способами можно расположить числа $1, 2, \ldots, n^2$ в виде квадрата со стороной n так, чтобы на каждой

горизонтали и вертикали числа образовывали арифметическую прогрессию?

115. Квадратная таблица с n строками и столбцами называется *матрицей Адамара*, если

а) каждый ее элемент равен 1 или -1;

б) сумма произведений соответствующих элементов любых двух различных строк равна нулю.

Докажите, что число строк любой матрицы Адамара делится на 4.

116. Докажите, что для любого числа n вида $n = 2^k$ существует матрица Адамара с n строками. Постройте матрицу Адамара с 12 строками.

117. Пусть r — нечетное число. Из чисел $0, 1, \ldots, r$ можно составить $r(r+1)/2$ пар (пары, отличающиеся лишь порядком элементов, считаются одинаковыми). Назовем *квадратом Рума* квадратную таблицу с r строками и r столбцами, в каждой клетке которой записана либо одна из таких пар, либо черточка, причем

а) каждая пара (i, j) входит в таблицу один и только один раз;

б) в каждой строке и каждом столбце таблицы выписаны по одному разу все числа $1, 2, \ldots, r$.

Докажите, что при $r = 3$ и $r = 5$ не существует квадрата Рума. Постройте квадраты Рума при $r = 7$ и $r = 9$.

118. Разбейте множество чисел $\{1, 2, 3, \ldots, 13\}$ на три подмножества так, чтобы ни в одном подмножестве не было тройки чисел x, y, z, для которой $x + y = z$.

119. Докажите, что множество чисел $\{1, 2, \ldots, (3^n - 1)/2\}$ можно разбить на n подмножеств так, чтобы ни в одном из этих подмножеств не было трех чисел x, y, z, для которых $x + y = z$.

120. Докажите, что при любом разбиении множества чисел $\{1, 2, 3, \ldots, 750\}$ на три подмножества хотя бы одно из этих подмножеств содержит числа x, y, z, такие, что $x + z = 2y$.

121. Два графа с общими вершинами называются дополнительными друг к другу, если во втором соединены дугами те и только те вершины, которые не соединены дугами в первом графе. Докажите, что для любого m найдется такое N, что из любых двух дополнительных графов с N вершинами хотя бы в одном можно выбрать m точек, каждая пара которых соединена дугой.

122. Каждая пара из n точек соединена дугой. Эти дуги разбиты на k классов так, что любые два ребра одного и того же класса имеют общую вершину. Докажите, что $k \geqslant n - 2$.

123. Назовем граф четным, если в нем каждый замкнутый путь состоит из четного числа ребер. Докажите, что граф четен в том и только том случае, когда его вершины можно разбить на два класса так, что вершины одного и того же класса не соединяются дугами.

124. Если из каждой вершины четного графа выходит не более k ребер, то ребра графа можно разбить на k классов так, что никакие два ребра одного класса не выходят из одной вершины.

Глава III

КОМБИНАТОРИКА КОРТЕЖЕЙ И МНОЖЕСТВ

Суеверный председатель

«Опять восьмерка!» — горестно воскликнул председатель клуба велосипедистов, взглянув на погнутое колесо своего велосипеда. «А все почему? Да потому что у меня членский билет № 888 — целых три восьмерки. И теперь не проходит и месяца, чтобы то на одном, то на другом колесе не появилась восьмерка. Надо менять номер билета! А чтобы меня не обвинили в суеверии, проведу-ка я перерегистрацию всех членов клуба и буду выдавать только билеты с номерами, в которые не входит ни одна восьмерка. Не знаю только, хватит ли на всех номеров — ведь у нас в клубе почти 600 членов. Неужели придется сначала выписать все номера от 000 до 999, а затем вычеркивать из них все номера с восьмерками?» Чтобы помочь председателю, нам нужно решить такую комбинаторную задачу:

Сколько существует трехзначных номеров, не содержащих цифры 8?

Сначала найдем количество однозначных номеров, отличных от 8. Ясно, что таких номеров девять: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 (номер 8 пропускается). А теперь найдем все двузначные номера, не содержащие восьмерок. Их можно составить так: взять любой из найденных однозначных номеров и написать после него любую из девяти допустимых цифр. В результате из каждого однозначного номера получится 9 двузначных. А так как однозначных номеров было 9, то получится $9 \cdot 9 = 9^2$ двузначных номеров. Вот они:

00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 09
10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19
20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 29
30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 39
40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 49
50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 59

60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 69
70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 79
90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 99

Итак, существует $9^2 = 81$ двузначный номер без цифры 8. Но к каждому из этих номеров можно приписать справа любую из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 и получить трехзначный номер, не содержащий цифру 8. При этом получаются все трехзначные номера с требуемым свойством. В результате мы нашли $9^2 \cdot 9 = 9^3$ трехзначных номеров без восьмерок.

Таким же образом устанавливаем, что четырехзначных номеров без восьмерок существует $9^4 = 6561$, а пятизначных — $9^5 = 59\,049$.

Если бы председатель клуба был еще суевернее и отказался и от цифры 0, поскольку она походит на вытянутое колесо, то он смог бы составить лишь $8^3 = 512$ трехзначных номеров и их уже не хватило бы на всех членов клуба.

Кортежи

Номера, составленные из трех цифр, нельзя рассматривать как множества из трех элементов. Во-первых, в номерах цифры могут повторяться (например, 775), а в множествах элементы не повторяются. Во-вторых, в номерах важен порядок цифр (175 и 571 — совсем разные номера), а в множествах порядок элементов роли не играет. Поэтому, если мы хотим изучать такие объекты, как номера или слова (в них тоже буквы могут повторяться, а от перестановки букв слово меняется), нужно ввести новое математическое понятие, отличное от понятия множества.

Это новое понятие математики назвали кортежем (наряду со словом «кортеж» применяют названия «размещение», «конечная последовательность», «вектор», «слово» и т. д.). Кортеж — французское слово, означающее торжественное шествие. И у нас иногда говорят «кортеж автомашин», «свадебный кортеж» и т. д. При этом кортеж автомашин может состоять из нескольких «Волг», нескольких «Чаек» и нескольких «Жигулей». Если считать машины одной и той же марки неразличимыми, то получим, что в кортеже автомашин один и тот же элемент может повторяться несколько раз.

В математике кортеж определяют так. Пусть имеется несколько множеств $X_1, \ldots, X_k$. Представим себе, что их элементы сложены в мешки, а мешки перенумерованы. Вытащим из первого мешка какой-нибудь элемент (т. е. возьмем какой-нибудь элемент a_1 множества X_1), затем вытащим элемент a_2 из мешка X_2 и будем продолжать этот процесс до тех пор, пока из мешка X_k не будет вытащен элемент a_k. После этого расставим полученные элементы в том порядке, в котором они появились из мешков $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Это и будет *кортежем длины* k, составленным из элементов множеств $X_1, \ldots, X_k$. Элементы $a_1, \ldots, a_k$ называют *компонентами*, или *координатами*, кортежа.

Два кортежа называют *равными* в том и только том случае, когда они имеют одинаковую длину, а на соответствующих местах стоят одни и те же элементы.

В определении кортежа не уточнялось, могут ли множества $X_1, \ldots, X_k$ иметь общие элементы. На первый взгляд, этого не следовало бы допускать — если уж какой-нибудь элемент вытащен из мешка и занял свое место, то откуда же взять его еще раз? Но мы живем в мире взаимозаменяемых деталей и запасных частей. Поэтому можно считать, что каждый элемент изготовлен в достаточном количестве экземпляров и в случае необходимости может лежать в нескольких мешках. Поэтому в кортежах координаты могут повторяться, например, кортеж может иметь такой вид: (1, 2, 1, 3, 4, 4, 6). Не исключен и такой случай, когда все множества $X_1, \ldots, X_k$ совпадают. В этом случае можно считать, что у нас есть один мешок с элементами множества X, эти элементы извлекают из мешка, записывают, а потом кладут обратно в мешок.

С кортежами мы встречаемся очень часто. Например, семизначные номера телефонов в Москве — это кортежи длины 7, составленные из элементов множества $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, слова русского языка (точнее, их записи) — кортежи различной длины, составленные из букв русского алфавита, а предложения — кортежи, составленные из русских слов (отсюда видно, что координатами кортежей могут быть и кортежи).

Правило произведения

Возьмем несколько конечных множеств $X_1, \ldots, X_k$, состоящих соответственно из $n_1, \ldots, n_k$ элементов, и найдем, сколько кортежей длины k можно составить из элементов этих множеств. Способ, которым мы решим эту задачу, по сути дела будет тем же самым, каким было найдено число трехзначных номеров без восьмерок. Сначала найдем число кортежей длины 1, составленных из элементов множества X_1. Ясно, что их число равно n_1. Возьмем теперь один из этих кортежей (a_1) и припишем к элементу a_1 справа по очереди все элементы множества X_2. Получится n_2 кортежей длины 2, у которых первая координата равна a_1. Но вместо a_1 можно было бы взять любой другой элемент из X_1. Поэтому получается n_1 раз по n_2 кортежей, а всего n_1n_2 кортежей длины 2 или, как чаще говорят, *пар*. Из каждой такой пары получим n_3 троек, приписав к ней по очереди все элементы множества X_3, а всего $n_1 n_2 n_3$ троек. Продолжая этот процесс, получим в конце концов $n_1n_2 \ldots n_k$ кортежей длины k, составленных из элементов наших множеств.

Полученный результат является одним из важнейших в комбинаторике. На нем основан вывод многих формул этой науки. Есть лишь одна тонкость. Иногда множество X_2 бывает не задано, а определяется после выбора элемента a_1, множество X_3 определяется после выбора элементов a_1 и a_2 и т. д. Но при этом, как бы мы ни выбрали элемент a_1, выбор элемента a_2 возможен n_2 способами, при любом выборе элементов a_1 и a_2 на третье место имеется n_3 кандидатов и т. д. И в этом случае ответ получится тот же самый: общее число различных кортежей оказывается равным $n_1n_2 \ldots n_k$.

Так как для подсчета числа всевозможных кортежей приходится перемножать числа $n_1, n_2, \ldots, n_k$, то выведенный результат называют «правилом произведения». Сформулируем это правило так.

Если элемент a_1 можно выбрать n_1 способами, после каждого выбора этого элемента следующий за ним элемент a_2 можно выбрать n_2 способами... после выбора элементов $a_1, \ldots, a_{k-1}$ элемент a_k выбирается n_k способами, то кортеж $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ можно выбрать $n_1n_2 \ldots n_k$ способами.

Подсчитаем, например, сколько слов, содержащих 6 букв, можно составить из 33 букв русского алфавита при условии, что любые две стоящие рядом буквы различны (например, слово «корова» допускается, а слово «колосс» нет). При этом, разумеется, мы будем писать не только слова, имеющие смысл, но и такие, например, бессмысленные, как «трнаук» и т. п.

В этом случае на первое место у нас 33 кандидата. Но после того как первая буква выбрана, вторую можно выбрать лишь 32 способами — ведь повторять первую букву нельзя. На третье место тоже 32 кандидата — первую букву уже можно повторить, а вторую — нельзя. Также убеждаемся, что на все места, кроме первого, имеется 32 кандидата. А так как число этих мест равно 5, то получаем ответ $33 \cdot 32 \cdot 32 \cdot 32 \cdot 32 \cdot 32 = 1\ 107\ 396\ 236$.

Размещения с повторениями

Множества $X_1, \ldots, X_k$, из элементов которых составляются кортежи, могут иметь общие элементы. В частности, все они могут совпадать с одним и тем же множеством X, содержащим n элементов. Кортежи длины k, составленные из элементов n-множества X, называют *размещениями с повторениями* из n элементов по k, а их число обозначают $\overline{A}_n^k$ [1]

Из правила произведения сразу вытекает, что число размещений с повторениями из n элементов по k равно произведению k сомножителей, каждый из которых равен n, т. е. n^k. Итак, доказана формула

$$\overline{A}_n^k = n^k. \qquad (1)$$

Коды

При передаче сообщений по телеграфу используют различные коды, позволяющие представлять буквы, цифры и знаки препинания в виде кортежей из точек и тире. Первый такой код был предложен в 1838 г. изобретателем электрического телеграфа американцем Морзе. В этом коде число символов для каждой буквы различно. Для букв, которые встречаются часто, выбираются коды с малым

[1] От французского слова arrangement — размещения. Черта ставится, чтобы отличить их от размещений без повторений, о которых мы расскажем позднее.

числом символов, а для редко встречающихся букв — с большим числом символов. Например, буква «е» передается одной точкой, а редко встречающаяся буква «э» — набором из 5 символов ..—.. Это позволяет экономно передать текст, используя символы . и —. Морзе не утруждал себя глубокими исследованиями, чтобы подсчитать относительную частоту, с которой встречаются буквы в английских текстах — он просто пошел в ближайшую типографию и подсчитал число литер в наборных кассах. Лишь в 40-х годах XX в. американский ученый Клод Шеннон построил теорию информации, и на ее основе рассчитал, какой же код окажется самым выгодным; для этого ему пришлось учитывать не только частоту, с которой встречаются отдельные буквы, но и частоты сочетаний букв по две, по три и т. д.

Откуда же в коде Морзе взялось число 5? Почему нельзя передавать сообщения, используя лишь комбинации точек и тире, содержащие не более 4 знаков? Ответ на этот вопрос дает формула для размещений с повторениями. Из нее вытекает, что из точки и тире можно построить лишь два кортежа длины один (это, конечно, ясно и без всяких формул). Далее, из тех же знаков можно построить 2^2 кортежа длины 2, 2^3 кортежа длины 3, 2^4 кортежа длины 4. Общее число букв, которые можно передать кортежами точек и тире, имеющими длину от 1 до 4, равно $2+4+8+16$, т. е. 30. А в русском алфавите 33 буквы, да еще надо передавать цифры и знаки препинания. Ясно, что кортежей длины от 1 до 4 не хватает, надо брать еще кортежи длины 5 — тогда получается 62 кортежа, чего вполне достаточно для передачи всех букв, цифр и т. д.

Секретные замки

Для запирания сейфов и автоматических камер хранения багажа применяют секретные замки, которые открываются лишь тогда, когда набрано «тайное слово» (или тайный набор цифр). Это слово набирают с помощью одного или нескольких дисков, на которых изображены буквы (или цифры). Пусть число букв на каждом диске равно 12, а число дисков равно 5. *Сколько неудачных попыток может быть сделано человеком, не знающим секретного слова и подбирающим его наудачу?*

Из условия задачи видно, что порядок выбираемых букв существен (одно дело набрать на первом диске букву «а», а на втором букву «б», а другое — набрать эти же буквы в обратном порядке). Поэтому мы имеем здесь дело с кортежами. При этом никаких ограничений на эти кортежи не наложено. Так как по условию каждая буква может быть выбрана 12 способами, а длина кортежей равна 5, то по формуле (1) получаем, что число комбинаций равно $12^5 = 248\ 832$. Значит, неудачных попыток может быть 248 831. Считая по 10 секунд на одну попытку, получаем, что для открытия сейфа понадобится более 340 часов непрерывной работы. Впрочем, обычно сейфы делают так, чтобы после первой же неудачной попытки раздавался сигнал тревоги.

Первенство по футболу

В высшей лиге первенства СССР по футболу участвуют 16 команд. Разыгрываются 3 медали: золотая, серебряная и бронзовая. Перед началом первенства был объявлен конкурс знатоков, в котором требовалось указать распределение медалей. Сколько различных ответов можно дать на этот вопрос?

Во-первых, ясно, что здесь мы имеем дело с кортежами длины 3, а не с множествами из 3 элементов — ведь одно дело, когда золотую медаль получил «Арарат», а серебряную — киевское «Динамо», а другое, когда они меняются ролями и чемпионом страны становится «Динамо». Но в рассматриваемой задаче есть своеобразные черты, ведь теперь ни один элемент не может дважды встретиться в кортеже победителей: одна и та же команда не может получить, например, и золото, и бронзу. Поэтому нам надо решить такую задачу: *найти число кортежей длины 3, составленных из 16 команд, в которых ни одна команда не повторяется дважды.*

Золотую медаль может, вообще говоря, получить любая из 16 команд (мяч, как известно, круглый...). Но если какая-нибудь команда завоевала золотые медали, то на второе место претендуют 15 команд — все, кроме чемпиона. А после распределения золотой и серебряной медалей остаются лишь 14 претендентов на бронзовые медали. По правилу произведения выводим, что число различных кортежей, удовлетворяющих поставленным требованиям, равно $16 \cdot 15 \cdot 14 = 3\,360$.

Точно так же решается общая задача: *имеется множество X, состоящее из n элементов. Сколько кортежей длины k можно составить из элементов этого множества, если все элементы каждого кортежа должны быть различными?*

Кортежи, подчиненные этому условию, называют *размещениями без повторений* из n элементов по k, а их число обозначают A_n^k. Чтобы сосчитать A_n^k, будем рассуждать так: на первое место у нас n кандидатов. После того как оно заполнено, на второе место остаются $n-1$ кандидатов, на третье $n-2$ кандидатов и т. д. На k-е место имеется $n-k+1$ кандидатов (после того как мы выбрали $k-1$ элемент, остается $n-(k-1)=n-k+1$ элементов). Применяя правило произведения, находим

$$A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1). \qquad (2)$$

Эту формулу можно записать иначе, умножив числитель и знаменатель на $(n-k)\ldots1$. В числителе получится произведение всех чисел от 1 до n. Такие произведения часто встречаются в комбинаторике. Их называют *факториалами* и обозначают $n!$ (читают n факториал). Таким образом,

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \qquad (3)$$

Два размещения без повторений из n элементов по n состоят из одних и тех же элементов, расположенных в различном порядке. Поэтому такие размещения называют *перестановками* из n элементов. Их число обозначают P_n. По формуле (2) получаем

$$P_n = A_n^n = n(n-1)\ldots1 = n! \qquad (4)$$

Задача о ладьях

При решении задачи о ферзях (стр. 40) основная трудность состояла в отыскании хотя бы одного нужного нам расположения. В аналогичной задаче о ладьях трудность в ином (ладьи бьют по горизонталям и вертикалям). Расставить ладьи так, чтобы они не били друг друга, совсем легко — достаточно выстроить их по диагонали. Труднее узнать, сколькими способами их можно расположить требуемым образом — вообще в одних комбинаторных задачах трудно найти хотя бы одно решение, а в других решений много, а трудность состоит в их пересчете.

Итак, решим такую задачу: *найти число способов расстановки восьми ладей на шахматной доске, при которых они не бьют друг друга.*

Мы решим сразу более общую задачу:

Сколькими способами можно расставить n ладей на $(n \times n)$-доске, так, чтобы они не били друг друга?

Каждый способ задается перестановкой n чисел $1, 2, \ldots, n$ — указываются номера горизонталей занятых полей на первой, второй, . . . , n-й вертикалях. Но число таких перестановок равно $n!$ Значит, ладьи можно расставить $n!$ способами. При $n = 8$ получаем $8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40\,320$ способов.

(1×1)-доска состоит из одного поля. Поставить на нее одну ладью можно единственным образом. Поэтому считают, что $1! = 1$. (0×0)-доска совсем не имеет полей, или, как говорят математики, имеет *пустое множество* полей. «Поставить» на нее 0 ладей можно лишь одним способом — ничего никуда не ставить (в комбинаторике часто удобно считать и такие способы — иначе пришлось бы делать много лишних оговорок). Значит, надо положить $0! = 1$. Возможно, читателя удивит это равенство. Чтобы уменьшить его удивление, заметим, что для любого n верно соотношение $n! = n \cdot (n - 1)!$ (например, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3 \cdot 2!$). Полагая в нем $n = 1$, получаем, что $1! = 1 \cdot 0!$, а потому $0! = 1$. Если это рассуждение и не является доказательством (соотношение-то было доказано лишь при $n > 1$), оно делает более естественным данное выше определение для $0!$

Перестановки с повторениями

Четыре цифры 1, 2, 3, 4 можно переставлять друг с другом $P_4 = 4! = 24$ способами. В слове «мама» четыре буквы. Но перестановок из этих букв можно составить не 24, а только 6:

мама, маам, ммаа, амам, аамм, амма

Чтобы понять, почему так случилось, поставим в соответствие цифрам 1 и 2 букву «м», а цифрам 3 и 4 — букву «а». Тогда, например, перестановке 1234 будет соответствовать слово ммаа, а перестановке 1324 — слово мама. Но слово ммаа соответствует не только перестановке 1234, но и еще трем перестановкам: 2134, 1243 и 2143. Читатель может убедиться в этом прямой подстановкой букв вместо цифр. Но более поучительно такое рассуждение: если цифры 1 и 2 меняются местами, то в соответствующем слове меняются местами две буквы «м», а потому само слово остается неизменным. Неизменным оно остается и при взаимной перестановке цифр 3 и 4 — при этом в слове меняются местами две буквы «а». Теперь ясно, как из любой перестановки получить перестановки, приводящие к тому же самому слову: можно либо оставить эту перестановку неизменной, либо поменять в ней местами цифры 1 и 2, либо поменять местами цифры 3 и 4, либо, наконец, одновременно переставить 1 и 2, а также 3 и 4. Всего получается 4 перестановки цифр, отвечающие одному и тому же слову. Вот эти четверки перестановок:

1234	2134	1243	2143
1324	2314	1423	2413
1342	2341	1432	2431
3214	3124	4213	4123
3142	3241	4132	4231
3412	3421	4312	4321

Отсюда видно, что все множество из 24 перестановок цифр 1, 2, 3, 4 распадается на четверки, дающие одно и то же слово. Поэтому число различных слов равно $4!/4 = 6$.

Рассмотрим теперь задачу в общем виде. Пусть дан кортеж длины n, составленный из элементов множества $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$, причем буква x_1 входит в этот кортеж n_1 раз, ..., буква x_k — n_k раз. Тогда $n = n_1 + \ldots + n_k$. Если переставлять в этом кортеже буквы, будут получаться новые кортежи, имеющие тот же состав, т. е. такие, что буква x_1 входит в них n_1 раз, ..., буква x_k входит n_k раз. Мы будем называть эти кортежи *перестановками с повторениями* из букв $x_1, \ldots, x_k$, имеющими состав $(n_1, \ldots, n_k)$. Число таких перестановок обозначим $P(n_1, \ldots, n_k)$.

С помощью правила произведения находим, что число перемещений букв, не меняющих данную перестановку, равно $n_1! \ldots n_k!$ Но n чисел можно переставлять друг с другом $n!$ способами. Поэтому число различных перестановок букв, имеющих состав $(n_1, \ldots, n_k)$, т. е. $P(n_1, \ldots, n_k)$, в $n_1! \ldots n_k!$ раз меньше, чем $n!$:

$$P(n_1, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \ldots n_k!}, \tag{5}$$

где $n = n_1 + \ldots + n_k$.

Пользуясь формулой (5), легко узнать, например, сколько различных кортежей получится, если переставлять буквы слова «математика». Это слово имеет состав (2, 3, 2, 1, 1, 1) и потому получается

$$P(2, 3, 2, 1, 1, 1) = \frac{10!}{2!\,3!\,2!\,1!\,1!\,1!} = 151\,200$$

кортежей.

Покупка пирожных

В кондитерском магазине продаются пирожные 4 сортов: наполеоны, эклеры, песочные и слоеные. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?

Если записывать порядок, в котором продавец кладет пирожные в коробку, то получится кортеж длины 7 из 4 элементов — сортов пирожных. Однако два кортежа одного и того же состава, например (н, н, э, п, с, с, э) и (э, н, с, н, з, п, с) (здесь записаны первые буквы названий пирожных), означают по сути дела одну и ту же покупку: 2 наполеона, 2 эклера, 2 слоеных пирожных и 1 песочное. Поэтому два способа сделать покупку надо считать различными лишь в случае, когда соответствующие кортежи отличаются своим составом. Итак, мы пришли к следующей задаче.

Сколько различных составов могут иметь кортежи длины k из n элементов?

По-другому эту же задачу можно сформулировать и так: назовем два кортежа *эквивалентными*, если они имеют одинаковый состав. *На сколько классов эквивалентности разбивается при этом вся совокупность кортежей длины k из n элементов?* Такие классы эквивалентности называют *сочетаниями с повторениями* из n элементов по k, а их число обозначают $\bar{C}_n^k$.

Чтобы стало ясно, как вычислять $\bar{C}_n^k$ в общем случае, вернемся к задаче о пирожных. Каждую покупку пирожных можно задать кортежем длины 4, состоящим из неотрицательных целых чисел, сумма которых равна 7. Например, кортеж (3, 2, 0, 2) означает, что куплено 3 наполеона, 2 эклера, ни одного песочного пирожного и 2 слоеных. Конечно, прежде чем задавать покупки кортежами чисел, сначала надо договориться, в каком порядке мы называем сорта пирожных; иначе можно оказаться в положении мужа, который никак не мог вспомнить, что ему поручила купить жена: 6 бутылок молока и 2 бутылки пива или 2 бутылки молока и 6 бутылок пива. Но каждый кортеж из неотрицательных целых чисел можно записать, пользуясь лишь единицами и нулями: для этого достаточно заменить каждое число столькими единицами, чему равно это число, а единицы, соответствующие различным числам, отделить друг от друга нулями. Например, кортеж (3, 2, 0, 2) запишется с помощью единиц и нулей так:

$$(1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1),$$

а записи (1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1) соответствует кортеж (2, 3, 1, 1). Поскольку числовые кортежи, задающие различные варианты покупки пирожных, имеют длину 4, а сумма входящих в них чисел равна 7, то количество нулей в их записях будет равно 3, а количество единиц равно 7. Но число перестановок из 3 нулей и 7 единиц равно

$$P(3, 7) = \frac{10!}{3!\,7!} = 120.$$

Значит, покупку можно совершить 120 способами.

В общем случае формула для $\bar{C}_n^k$ выводится точно так же. Любой состав кортежа длины k из n элементов имеет вид $(k_1, \ldots, k_n)$, где $k_1, \ldots, k_n$ — неотрицательные целые числа, сумма которых равна k. Заменяя каждое из чисел k_i соответствующим количеством единиц и разделяя нулями единицы, отвечающие различным числам, получаем кортеж из $n - 1$ нулей и k единиц. При этом каждому составу отвечает одна и только одна запись с помощью нулей и единиц, а каждая такая запись задает один и только один состав. Поэтому число различных составов равно числу перестановок с повторениями из $n-1$ нулей и k единиц, т. е. $\overline{C}_n^k = P(n-1, k)$. Итак, мы доказали, что

$$\overline{C}_n^k = P(n-1, k) = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!}. \tag{6}$$

Карточки «Спортлото»

Перед каждым тиражом «Спортлото» миллионы людей заполняют карточки, пытаясь угадать заветные 6 номеров из 49. У каждого из них своя система — одни зачеркивают подряд 6 номеров, другие — через три на четвертый, третьи вспоминают дни, в которые одержала победу любимая команда и т. д. Выясним, есть ли хоть два человека, ожидающие одних и тех же номеров? Чтобы с уверенностью ответить на этот вопрос, надо подсчитать, *сколькими способами можно выбрать 6 номеров из 49.*

С точки зрения математика, ничего не изменилось бы, если надо было бы выбрать не 6 номеров из 49, а, скажем, 6 книг из 49 различных книг, 6 карт из 49 и т. д. Чтобы не связывать задачу с конкретным выбором предметов, лучше говорить не о числах, книгах, картах и т. д., а об элементах некоторого множества.

Итак, нам нужно найти число k-подмножеств в n-множестве X. Такие подмножества называют также *сочетаниями из n элементов по k*. Число таких сочетаний обозначают C_n^k.

Задача о вычислении C_n^k сводится к уже решенной нами выше задаче о числе перестановок с повторениями. В самом деле, расставим любым образом заданные n элементов и зашифруем любой выбор k элементов кортежем длины n из k единиц и $n-k$ нулей — если элемент выбирают, то на его месте пишут 1, а если не выбирают, то 0. Например, выбор элементов a, c из элементов a, b, c, d, e записывается кортежем 10100. Каждому кортежу отвечает свой способ выбора элементов. Поэтому число k-подмножеств в n-множестве равно числу перестановок с повторениями из $n-k$ нулей и k единиц, т. е. оно равно $P(n-k, k)$. А

$$P(n-k, k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Значит, и

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}. \tag{7}$$

Равенства (6) и (7) показывают, что справедливо равенство

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k. \tag{8}$$

Теперь уже легко подсчитать число различных способов заполнения карточек «Спортлото». Нам надо выбрать 6-подмножества из 49-множества, а это можно сделать C_{49}^6 способами. Но по формуле (7)

$$C_{49}^6 = \frac{49!}{6!\,43!}.$$

Не следует думать, что придется перемножать числа от 1 до 49,— ведь и в числителе, и в знаменателе имеется произведение чисел от 1 до 43. Сокращая на него, получаем

$$C_{49}^6 = \frac{49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}.$$

А это выражение уже легче сосчитать, оно равно 13 983 816.

Выигрыши «Спортлото»

Мы нашли, что имеется 13 983 816 различных способов заполнения карточки «Спортлото». Разумеется, эти способы неравноценны — после тиража одни будут счастливы, узнав, что они угадали 5, а то и все 6 номеров, другие ограничатся угадыванием 3 или 4 номеров, а кое-кому останется надеяться, что в следующий раз им повезет больше. Подсчитаем теперь число лиц, угадавших p номеров. Проще всего ответить на вопрос, сколько человек угадает все 6 номеров — это удастся сделать лишь одному из 13 983 816. Значительно большему числу удастся отгадать 5 номеров. Здесь уже можно сделать ошибку в любом из 6 номеров, заменив его одним из неудачных 43 номеров. Чтобы подсчитать число возникающих при этом комбинаций, запишем их в виде пар, на первом месте которых стоит один из 6 заменяемых номеров, а на втором — тот номер, которым он заменяется. Например, если выиграли номера 1, 2, 3, 4, 5, 6, то эти пары имеют такой вид

(1,7) (1,8) . . . (1,49)
(2,7) (2,8) . . . (2,49)
. . . .
(6,7) (6,8) . . . (6,49)

Пара (1, 7) обозначает, что вместо правильной комбинации {1, 2, 3, 4, 5, 6} участник лотереи зачеркнул номера {7, 2, 3, 4, 5, 6}, угадав лишь 5 номеров. Из таблицы видно, что число возможностей ошибиться один и только один раз равно $6 \cdot 43 = 258$. Значит, 258 участников угадают 5 номеров.

Таким же образом, пользуясь правилом произведения, мы определяем, что 4 номера угадают $C_6^2 \cdot C_{43}^2 = 13\,545$ человек — сначала надо из 6 верных номеров выбрать какие-нибудь 2 (это делается C_6^2 способами), а затем заменить их парой номеров, выбранной из 43 несчастливых номеров (а это можно сделать C_{43}^2 способами). Комбинируя каждый способ выбора первой пары с каждым способом выбора заменяющей ее пары, мы и получим ответ $C_6^2 \cdot C_{43}^2$. Теперь уже легко понять, что 3 номера угадают $C_6^3 \cdot C_{43}^3 = 246\,820$ человек, 2 номера $C_6^4 \cdot C_{43}^4$ человек, один — $C_6^5 \cdot C_{43}^5$ человек, а C_{43}^6 человек не угадают ни одного номера.

Генуэзская лотерея

В прошлые века процветала так называемая генуэзская лотерея, сохранившаяся в некоторых странах и поныне. Участники этой лотереи покупали билеты, на которых стояли числа от 1 до 90. Можно было купить и билеты, на которых было сразу 2, 3, 4 или 5 чисел. В день розыгрыша лотереи из мешка, содержавшего жетоны с числами от 1 до 90, вынимали 5 жетонов. Выигрывали те, у которых все номера на билете были среди вынутых. Например, если на билете были числа 8, 21, 49, а вынутыми оказались числа 3, 8, 21, 37, 49, то билет выигрывал; если же вынимали, скажем, числа 3, 7, 21, 49, 63, то билет проигрывал, так как числа 8 среди вынутых не оказалось.

Если участник лотереи покупал билет с одним числом, то он получал при выигрыше в 15 раз больше стоимости билета; если с двумя числами (амбо), то в 270 раз больше, если с тремя числами (терн), то в 5500 раз больше, если с четырьмя числами (катерн) — в 75 000 раз больше, а если с пятью числами (квин) — то в 1 000 000 раз больше, чем стоимость билета [1].

Сосчитаем, каково отношение «счастливых» исходов генуэзской лотереи к общему числу ее исходов при различных способах игры. Общее число исходов сразу находится по формуле для числа сочетаний. Ведь из мешка с 90 жетонами вынимают 5 жетонов, причем порядок их извлечения не играет никакой роли. Получаются сочетания из 90 элементов по 5, число которых равно

$$C_{90}^{5}=\frac{90!}{5!\,85!}=\frac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}.$$

Предположим теперь, что участник лотереи купил билет с одним номером. В скольких случаях он выиграет? Для выигрыша необходимо, чтобы один из вынутых номеров совпал с номером на билете. Остальные 4 номера могут быть любыми. Но эти 4 номера выбираются из оставшихся 89 номеров. Поэтому число благоприятных комбинаций выражается формулой

$$C_{89}^{4}=\frac{89!}{4!\,85!}=\frac{89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}.$$

Отсюда следует, что отношение числа благоприятных комбинаций к общему числу комбинаций равно

$$\frac{C_{89}^{4}}{C_{90}^{5}}=\frac{5}{90}=\frac{1}{18}.$$

Это примерно означает, что игрок будет выигрывать 1 раз из 18.

---

[1] Видоизменением генуэзской лотереи является распространенная настольная игра в лото — здесь тоже участвуют бочонки с числами от 1 до 90, а на карточках у игроков напечатаны 3 ряда по 5 чисел в каждом ряду. Заполнение 4 чисел называют «квартира», что является искажением слова «катерн». Переживания участников генуэзской лотереи ярко описаны итальянской писательницей Матильдой Серао в новелле «Розыгрыш лотереи», см. книгу «Итальянские новеллы 1860—1914 гг.» (ГИХЛ, 1960, стр. 226—250).

А теперь подсчитаем шансы при игре на амбо. Здесь уже нужно, чтобы два загаданных номера вошли в число вынутых из мешка, а остальные три номера могут быть любыми. Так как их можно выбрать из оставшихся 88 номеров, то число «счастливых» исходов при игре на амбо дается формулой

$$C_{88}^3 = \frac{88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Отношение же числа «счастливых» исходов к общему числу исходов равно

$$\frac{C_{88}^3}{C_{90}^5} = \frac{4 \cdot 5}{90 \cdot 89} = \frac{2}{801}.$$

При игре на терн отношение числа благоприятных исходов к числу всех исходов равно

$$\frac{C_{87}^2}{C_{90}^5} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{90 \cdot 89 \cdot 88} = \frac{1}{11\,748},$$

при игре на катерн

$$\frac{C_{86}^1}{C_{90}^5} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87} = \frac{1}{511\,038},$$

и при игре на квин

$$\frac{1}{C_{90}^5} = \frac{1}{43\,949\,268}.$$

Некоторые свойства сочетаний

Поскольку числа C_n^k показывают, сколько k-подмножеств содержится в данном n-множестве, то между ними есть целый ряд зависимостей, отражающих различные зависимости между подмножествами. Эти зависимости можно доказывать по-разному. В некоторых случаях удобнее всего прямо воспользоваться формулой (7) для числа сочетаний. Однако более красивым и содержательным является иной способ, основанный на комбинаторных соображениях. Мы подсчитываем число подмножеств некоторого вида и разбиваем совокупность всех таких подмножеств на классы так, чтобы ни одно подмножество не попало в два различных класса. После этого находим, сколько подмножеств входит в каждый класс. Складывая полученные числа, снова получаем количество подмножеств выбранного вида. Это и дает искомое соотношение.

Самым простым является соотношение

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \tag{9}$$

выражающее, что число k-подмножеств в n-множестве совпадает с числом $(n-k)$-подмножеств того же множества. Чтобы доказать это равенство, надо установить какую-то связь между k-подмножествами и $(n-k)$-подмножествами. Но если удалить из n-множества X k-подмножество Y, то останется $(n-k)$-подмножество Y', которое называют *дополнением* к Y в X. Ясно, что Y в свою очередь является дополнением к Y', $(Y')' = Y$. Поэтому из k-подмножеств и их дополнений можно устроить пары, такие, что каждое k-подмножество и каждое $(n-k)$-подмножество попадут лишь в одну пару. А это и значит, что таких подмножеств одинаковое количество, т. е. $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Зафиксируем теперь какой-нибудь из n элементов, например a, и разобьем все сочетания из n элементов по k на два класса — содержащие элемент a и не содержащие этого элемента. Число сочетаний первого класса равно C_{n-1}^{k-1} — надо из оставшихся $n-1$ элементов выбрать еще $k-1$ элементов. А число сочетаний второго класса равно C_{n-1}^{k} — надо выбрать k из всех элементов, исключая a. Но любое сочетание относится или к первому, или ко второму классу. Поэтому

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k}. \tag{10}$$

Арифметический треугольник

Формула (10) дает простой способ последовательного вычисления значений C_n^k. Сначала надо написать значение $C_0^0 = 1$. В следующей строке напишем значения $C_1^0 = 1$ и $C_1^1 = 1$ так, чтобы значение C_0^0 оказалось над промежутком между этими двумя числами. Далее, мы знаем, что $C_2^0 = C_2^2 = 1$. Эти числа запишем в следующей строке. А между ними запишем число C_2^1. Но по формуле (10)

$C_2^1 = C_1^0 + C_1^1$. Значит, C_2^1 равно сумме чисел предыдущей строки, стоящих слева и справа от него, $C_2^1 = 1 + 1 = 2$. По тому же правилу заполняем остальные строки: сначала пишем по бокам значения $C_n^0 = C_n^n = 1$, а все промежуточные значения вычисляем как суммы чисел предыдущей строки, стоящих слева и справа от вычисляемого значения. В результате получаем такой числовой треугольник:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Его называют *арифметическим треугольником.*

При составлении арифметического треугольника каждое число n-й строки участвует в образовании двух чисел $(n + 1)$-й строки — стоящего слева и стоящего справа от него. Поэтому если сложить числа $(n + 1)$-й строки через одно, то в полученную сумму войдут по одному разу все числа n-й строки. Складывать числа через одно можно двумя способами — начав с первого числа строки или начав со второго числа. В обоих случаях получится одна и та же сумма, равная сумме чисел в n-й строке.

Доказанное свойство арифметического треугольника можно записать так:

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = \\ = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \ldots + C_{n-1}^{n-1}. \tag{11}$$

Из него следует, что сумма чисел $(n + 1)$-й строки вдвое больше суммы чисел n-й строки. Иными словами, при переходе к следующей строке арифметического треугольника сумма чисел в строке удваивается. Но в первой строке стоит только одно число 1, а потому для нее сумма равна 1. Поэтому в $(n + 1)$-й строке сумма чисел равна 2^n

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n. \tag{12}$$

Человек бродит по городу

На рис. 19 изображен план города (столь правильный вид имеет, например, план Канберры — столицы Австралии). В этом городе $n \times k$ прямоугольных кварталов, разделенных $n-1$ «горизонтальными» и $k-1$ «вертикальными» улицами. *Путник хочет попасть из пункта A в пункт B кратчайшим путем, т. е. двигаясь все время или «слева направо», или «снизу вверх». Сколькими путями он может добраться из A в B?*

Ясно, что, каким бы путем ни шел путник, он пройдет через $n+k$ перекрестков (считая точку A, но не считая точки B). На каждом перекрестке он может идти или направо, или вверх. В соответствии с этим все перекрестки делятся на два класса: «перекрестки направо» и «перекрестки вверх». При этом направо путник идет k раз, а вверх n раз. Значит, чтобы однозначно восстановить его путь, надо знать лишь те k случаев, когда он идет направо. Но их можно выбрать из общего числа $n+k$ перекрестков C_{n+k}^{k} способами. Поэтому число искомых путей равно C_{n+k}^{k}.

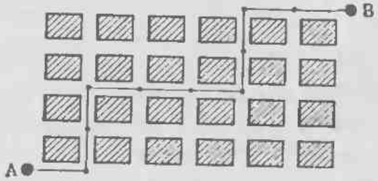


Рис. 19.

На рис. 19 изображен путь, проходящий через 10 перекрестков. Направо путник идет на перекрестках с номерами 1, 4, 5, 6, 9 и 10.

Решим теперь задачу, предлагавшуюся в 1945 г. на VIII Московской математической олимпиаде.

Имеется сеть дорог (рис. 20). *Из пункта A выходят 2^N человек. Половина из них идет по направлению l, а половина — по направлению m. Дойдя до первого перекрестка, каждая группа разделяется: половина идет по направлению l, а половина — по направлению m. Такое же разделение происходит на каждом перекрестке. В каких пунктах окажутся эти люди после того, как они пройдут N перекрестков и сколько людей будет в каждом из этих пунктов?*

Так как общее число пройденных каждым человеком отрезков пути равно N, то люди окажутся в пунктах B_k, имеющих координаты вида $(k, N-k)$, где k принимает значения от 0 до N. Все эти пункты расположены на прямой B_0B (см. рис. 20), где $B = B_N$.

Теперь остается узнать, сколько человек придет в пункт B_k. Из точки A в каждый пункт B_k, $k = 0, 1, \ldots, N$, ведут C_N^k путей, причем

$$C_N^0 + C_N^1 + \ldots + C_N^N = 2^N$$

(см. стр. 91). Значит, число путей, идущих из пункта A в пункты, расположенные на прямой B_0B, равно 2^N, т. е. в точности равно числу людей, вышедших из пункта

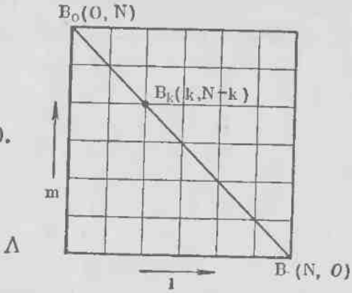


Рис. 20.

A. Это означает, что каждый путь пройдет один и только один человек, а количество людей, оказавшихся в пункте B_k, равно числу путей из A в B_k, т. е. C_N^k. Если в каждом пункте B_k указать количество пришедших туда людей, то по линии B_0B окажутся выписанными числа $(N+1)$-й строки арифметического треугольника.

Броуновское движение

Решенной выше задаче можно придать следующую, по сути дела эквивалентную формулировку.

Из точки O на прямой Ox выходит 2^N человек. Из них половина идет направо, половина — налево. Через час каждая группа снова делится пополам и половина идет направо, а половина — налево. Такое разделение происходит каждый час. Сколько человек придет в каждую точку этой прямой через N часов после выхода?

Будем считать, что за один час пешеходы проходят половину единицы пути. Рассуждая точно так же, как при решении предыдущей задачи, получаем следующий результат: через N часов участники прогулки окажутся в точках B_k $(k - N/2)$, $0 \leqslant k \leqslant N$ (точка O — начало отсчета). При этом в точку B_k придет C_N^k человек.

В некоторых задачах физики приходится изучать подобные блуждания. Например, такое блуждание является простейшей моделью так называемого *броуновского движения*, совершаемого частицами под ударами молекул.

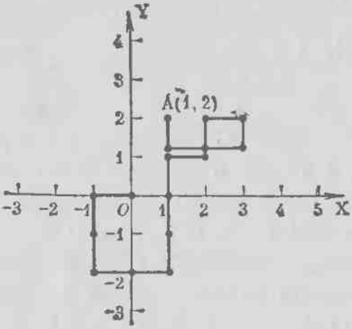
Рассмотрим частицы, которые могут передвигаться только по прямой линии. Так как удары молекул носят случайный характер, то в первом приближении можно считать, что за единицу времени половина частиц сместится на $^1/_2$ единицы длины вправо, а половина — на $^1/_2$ единицы длины влево (на самом деле процесс значительно сложнее, так как возможны передвижения на отрезки различной длины). Поэтому если взять 2^N частиц, находящихся в момент времени $t = 0$ в точке 0, то они будут перемещаться примерно так, как было описано в нашей задаче. Такое распространение частиц в физике называют *диффузией*. Решенная выше задача о случайном блуждании толпы людей позволяет найти, как распределяются блуждающие частицы через некоторое время после начала диффузии. Оказывается, что через N единиц времени частицы распределятся по следующему закону: в точке $B_k(k - N/2)$ окажется C_N^k частиц.

Блуждания по бесконечной плоскости

До сих пор мы рассматривали движения путников, идущих в одном из двух направлений (вверх или вправо, вправо или влево). Изучим теперь блуждания на бесконечной плоскости. Представим себе, что из точки O (рис. 21) выходит 4^N людей, которые делятся уже на 4 равные группы, идущие от точки O во все 4 стороны. На каждом перекрестке дошедшие до него люди снова делятся на 4 группы и т. д. (наглядное представление о таком способе передвижения дают блуждания пьяного человека; недаром в фольклорном варианте этой задачи говорилось «Пусть в точке O находится питейное заведение...»). Мы хотим подсчитать распределение людей через N промежутков времени после выхода из точки O. Как и в задаче на стр. 92, для этого достаточно подсчитать число путей, состоящих из N единичных отрезков и ведущих из точки O в точку A (p, q) (за единицу длины мы принимаем расстояние между соседними перекрестками). Не теряя общности, можно считать, что $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$.

Обозначим через T множество, состоящее из чисел 0, 1, ..., $N-1$; эти числа мы будем рассматривать как моменты времени, в которые происходят повороты. Чтобы задать любой путь из O в A, состоящий из N звеньев, надо для каждого из этих чисел знать, в каком направлении происходит поворот в соответствующий момент времени. Например, изображенный на рис. 21 путь задается после-

Рис. 21.



довательностью букв л, н, н, п, п, в, в, в, п, в, п, н, л, л, в, где буква «п» означает движение вправо, «л» — влево, «в» — вверх и «н» — вниз. Здесь $N = 15$, $p = 1$, $q = 2$.

Обозначим через X множество всех чисел, которым соответствуют движения влево или вниз, а через Y — множество чисел, которым соответствуют движения вправо или вниз. Например, для пути на рис. 21 эти множества таковы:

$$X = \{1, 2, 3, 12, 13, 14\}, \quad Y = \{2, 3, 4, 5, 9, 11, 12\}.$$

Если известны множества X и Y, то легко найти те номера, которые соответствуют движениям вниз — они принадлежат и X и Y (в нашем случае это номера 2, 3 и 12). Движениям влево соответствуют числа из X, не принадлежащие Y (в нашем примере — числа 1, 13, 14), вправо — числа из Y, не принадлежащие X (в примере — числа 4, 5, 9, 11), и вверх — числа, не принадлежащие ни X, ни Y (в примере — числа 6, 7, 8, 10, 15).

Таким образом, задав множества X и Y, мы для каждого момента времени знаем направление поворота, а тем самым знаем и весь путь из точки O в точку A. Множества X и Y можно задавать произвольно при одном лишь ограничительном условии — в конце пути нам надо оказаться в точке $A\ (p,\ q)$. Это условие позволяет найти число элементов в X и в Y. В самом деле, множество X состоит из номеров, которым отвечают движения влево или вниз. По нашему предположению число этих движений — половина числа излишних движений (они погашаются соответствующими ходами вправо и вверх), а потому X состоит из $k = \frac{1}{2}(N - p - q)$ элементов (в нашем примере — из 6 элементов). Но k-подмножество X можно выбрать из N-множества T C_N^k способами. В множестве Y больше элементов, чем в X — в нем берутся не ходы влево, а ходы вправо, а их на p больше, чем ходов влево (за счет этого мы и попадаем в точку с абсциссой p). Ходы же вниз в обоих множествах одни и те же. Значит, в Y на p элементов больше, чем в X, т. е. $p + k$ элементов. Поэтому множество Y можно выбрать C_N^{p+k} способами. А теперь применим правило произведения и убедимся, что число путей длины N, ведущих из точки O в точку $A\ (p,\ q)$ (т. е. число соответствующих пар множеств $(X,\ Y)$), равно $C_N^k \cdot C_N^{p+k}$. Напомним, что $k = \frac{1}{2}(N - p - q)$.

Корова или ворона?

Вероятно, каждый читатель знает комичные истории, связанные с перевранными телеграммами. Достаточно телеграфисту заменить одну точку на тире или случайно добавить лишний знак и одна-две буквы окажутся неверными, а тогда и вся телеграмма может получить значение, противоположное нужному.

Особенно опасны ошибки при передаче данных в быстродействующих вычислительных машинах. Известен случай, когда из-за неправильно поставленной запятой американцам пришлось подорвать уже взлетевшую ракету-носитель — ошибка в программе привела к недопустимому отклонению от расчетной траектории. Поэтому борьба с шумами, с искажениями текстов — одна из важных проблем теории передачи информации.

Остроумный способ борьбы с помехами предложил американский математик Хемминг. Он ввел класс кодов, обладающих тем свойством, что при сбое происходит автоматическое исправление, аппарат как бы сам угадывает правильное написание передаваемого текста. Чтобы понять принцип кода Хемминга, заметим, что неприятности часто происходят из-за того, что некоторые слова пишутся почти одинаково. Рассказывают, что однажды редактор провинциальной газеты поместил такое сообщение о коронации Николая II: «Митрополит возложил на голову Его Императорского Величества ворону». На другой день было дано исправление опечатки: Вместо «ворону» читать «корову».

Если бы осмысленные слова отличались друг от друга по крайней мере 3 буквами, то при ошибке в одном месте сразу можно было бы найти, где она произошла и как ее надо исправить.

Конечно, менять естественные языки невозможно. Но искусственные языки, которыми пользуются при передаче сообщений — телеграфные коды, коды в ЭВМ и т. д., можно делать такими, чтобы в них осмысленные слова находились на достаточном удалении друг от друга. При этом обычно используют лишь «слова», которые являются кортежами одной и той же длины n из цифр 0 и 1, а за расстояние между двумя словами принимают число мест, в которых они отличаются друг от друга (например, 0011001 находится на расстоянии 4 от 0101010 — эти кортежи отличны на втором, третьем, шестом и седьмом местах).

А теперь зададим какое-нибудь натуральное число r и выберем такое множество X слов, что любые два слова из X находятся друг от друга на расстоянии большем, чем $2r+1$. Тогда, если при передаче какого-нибудь слова из X будет допущено не более чем r ошибок, легко узнать, к какому слову из X ближе всего полученное сообщение, и тем самым восстановить правильный текст. Например, если выбраны «слова» 000000, 000111, 111000, 111111, находящиеся друг от друга на расстоянии 3, а получено сообщение 100111, то оно ближе всего ко второму кодовому слову; сообщение же 000100 ближе к первому кодовому слову. Значит, такой код исправляет любую ошибку в одном знаке. Построение самоисцеляющихся кодов, конечно, происходит не бесплатно — запас осмысленных слов оказывается меньше, чем запас всех слов заданной длины n (впрочем, и в естественных языках не любая совокупность знаков имеет смысл).

Поэтому важно знать, много ли можно выбрать кортежей длины n из чисел 0 и 1 так, чтобы любые два выбранных кортежа отличались друг от друга по крайней мере в $(2r+1)$-й координате (при этом ясно, что чем больше r, тем меньше должно получиться кортежей). А это уже комбинаторная задача, и мы переходим из области теории передачи информации в область комбинаторики.

К сожалению, точного ответа здесь дать нельзя — задача слишком сложна. Но в таких случаях довольствуются приближенными оценками, показывающими практическую применимость или неприменимость предлагаемого кода. Обозначим через $A(n, r)$ число искомых кортежей, а через $\sigma(n, k)$ сумму вида $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^k$. Тогда справедливы неравенства

$$\frac{2^n}{\sigma(n,2r)} \leqslant A(n,r) \leqslant \frac{2^n}{\sigma(n,r)}.$$

Сам Хемминг предложил код, основанный на двоичной системе счисления. Номер каждого места, на котором в кортеже стоит 1, записывают в двоичной системе счисления. Кодовыми словами считают лишь те кортежи, для которых совокупность полученных записей имеет в каждом разряде четное число единиц. Например, кортеж 1011010 — кодовое слово, так как в нем единицы стоят на 1-м, 3-м, 4-м и 6-м местах, а записи этих чисел в двоичной системе счисления имеют вид 001, 011, 100, 110; мы видим, что в наборе этих записей 1 встречается по 2 раза на всех 3 местах (на первом месте в 3-й и 4-й записи, на втором во 2-й и 4-й, а на третьем в 1-й и 2-й). А кортеж 1011000 не является кодовым словом, так как двоичные записи чисел 1, 3 и 4 имеют вид 001, 011 и 100, а в этих записях на 1-м и 2-м местах единицы встречаются лишь по одному разу, т. е. нечетное число раз.

Нетрудно доказать, что два кортежа, удовлетворяющих условию Хемминга, отличаются друг от друга по крайней мере в 3 местах. Поэтому такой код может исправлять одну ошибку в каждом кодовом слове. Для $n = 6$ кодовые слова Хемминга таковы: 000000, 001011, 010101, 011110, 100110, 110011, 111000.

Изучение и построение кодов, исправляющих ошибки, стало сейчас важной главой прикладной математики, использующей комбинаторику, теорию информации и многие ветви общей алгебры (поля Галуа, группы и т. д.).

Староста студенческой группы представил такой отчет о физкультурной работе: «Всего в группе 45 студентов. Из них в футбольной секции состоят 25 человек, в баскетбольной — 30 и в шахматной — 28». Когда ему указали, что в сумме получается 83 человека, а это больше, чем 45, он ответил, что ничего удивительного в этом нет, так как 16 студентов одновременно участвуют и в футбольной и в баскетбольной секции, 18 — в футбольной и шах-

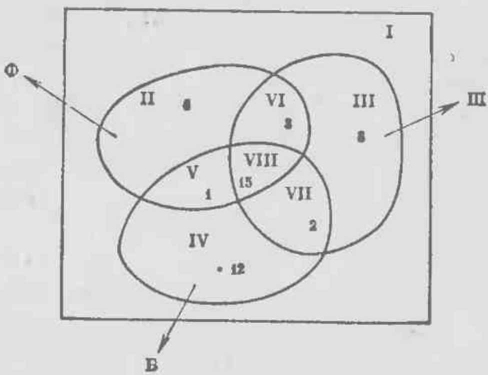


Рис. 22.

матной, а 17 — в баскетбольной и шахматной. Более того, добавил он, 15 студентов участвуют во всех трех секциях.

Однако эти объяснения не были признаны удовлетворительными. Так как дело происходило на математическом факультете, то по отчету была составлена графическая схема (рис. 22). Здесь прямоугольник изображает совокупность всех студентов в группе, а овалы — участников трех секций — футбольной, баскетбольной и шахматной. Овалы частично перекрываются, поскольку по утверждению старосты некоторые студенты участвуют в двух, а то и в трех секциях. Затем начали заполнять отдельные части схемы, руководствуясь данными из отчета.

В область, обозначенную римской цифрой VIII, поставили число 15 — именно столько студентов, по утверждению автора отчета, принимали участие во всех трех секциях. После этого в область, помеченную римской цифрой V, поставили число 1 — всего и футболом и баскетболом занимались 16 человек, а из них 15 увлекались еще и шахматами, поэтому лишь один студент играл в футбол и в баскетбол, но не играл в шахматы. Далее по тем же соображениям в область VI поставили число 3, а в область VII — число 2. Потом заполнили числами области, помеченные цифрами II, III и IV. Область II изображала совокупность студентов, интересовавшихся лишь футболом. Так как всего в футбольной секции было 25 студентов, из которых 1 играл еще в баскетбол (но не в шахматы), а 3 — в шахматы (но не в баскетбол) и 15 занимались всеми тремя видами спорта, то «чистых футболистов» набралось $25-1-3-15 = 6$ человек. Так же сосчитали, что «чистых баскетболистов» было 12, а «чистых шахматистов» — 8. Когда сложили числа, написанные в областях II, III, IV, V, VI, VII и VIII, получили сумму $6+8+12+1+3+2+15 = 47$, превышавшую число студентов в группе. А этого быть не могло, так как ни один студент не попадал в две области сразу. Отчет был забракован.

Плохая погода

Задачу «*В вазе лежат 6 яблок и 12 груш. Сколько в ней плодов?*» решают в 1-м классе: $6+12 = 18$. Если надо выбрать один из лежащих в вазе плодов, то это можно сделать 18 способами. Вообще справедлив следующий принцип комбинаторики, называемый «правилом суммы».

Если объект a можно выбрать m способами, а объект b выбрать n способами, то выбор «a или b» можно сделать $m+n$ способами.

На языке теории множеств это утверждение означает, что *если m-множество A не пересекается с n-множеством B, то их объединение $A \cup B$ содержит $m+n$ элементов.*

Сложнее получить ответ, если множества A и B могут пересекаться. Например, невозможно определить число дней с плохой погодой из рассказа «Когда я отдыхал в сентябре в Паланге, то 12 дней шел дождь, 8 дней дул сильный ветер, а 4 дня было холодно». Может быть, плохая погода была 24 дня ($12+8+4 = 24$), а может быть, всего 12 дней нельзя было купаться, так как шел дождь, причем в некоторые из этих дней был, кроме того, сильный ветер, а в некоторые — еще и холодно. Чтобы решить такую задачу, надо провести анализ, похожий на анализ отчета старосты, а для этого нужны дополнительные сведения.

Итак, мы хотим решить такую задачу: *Найти число элементов в объединении нескольких множеств, зная число элементов в каждом из них, а также число элементов в каждом из пересечений этих множеств по два, по три и т. д.*

Начнем со случая, когда у нас всего два множества.

Определить число плохих дней из рассказа «12 дней шел дождь, 8 дней дул сильный ветер, причем 5 дней были и дождливы и ветрены» уже несложно. Если мы сложим число дождливых и ветреных дней, то в сумме $12 + 8$ дни, когда погода была плоха по обеим причинам, окажутся учтенными дважды. Поэтому, чтобы определить количество дней с плохой погодой, надо из суммы $12 + 8$ вычесть 5. Ответ $12 + 8 - 5 = 15$ даст искомое число.

Вообще если множества A и B содержат соответственно m и n элементов, а их пересечение $A \cap B$ содержит p элементов, то объединение $A \cup B$ множеств A и B имеет $m + n - p$ элементов. Это утверждение можно записать так:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Разберемся в случае, когда у нас три множества A, B и C. Если эти множества перекрываются лишь попарно (т. е. пересечение $A \cap B \cap C$ всех трех множеств пусто), то надо считать так же, как и выше: сначала сложить мощности всех трех множеств, а потом вычесть мощности всех пересечений множеств по два (число таких пересечений тоже равно трем — $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$). Но если множество $A \cap B \cap C$ непусто, то его элементы окажутся совсем неучтенными: сначала их три раза учитывают, когда складывают мощности каждого из трех множеств A, B, C, а потом те же три раза учитывают, отнимая мощности пересечений множеств по два. Эти две операции гасят друг друга и полученный ответ окажется меньше истинного как раз на число элементов в $A \cap B \cap C$. Значит, это число и надо еще добавить

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) -$$
$$- n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

Теперь уже ясно, как выглядит общее правило: *для любых множеств $A_1, A_2, \ldots, A_k$ справедливо равенство*

$$n(A_1 \bigcup A_2 \bigcup \ldots \bigcup A_k) = n(A_1) + n(A_2) + \ldots + n(A_k) - \\ - n(A_1 \bigcap A_2) - n(A_1 \bigcap A_3) - \ldots - n(A_{n-1} \bigcap A_n) + \\ + n(A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3) + n(A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_4) + \ldots + \\ + (-1)^{k-1} n(A_1 \bigcap A_2 \bigcap \ldots \bigcap A_k). \quad (13)$$

Иными словами, если мы пересекаем нечетное количество множеств, то мощность этого пересечения берется со знаком «плюс», а если четное — то со знаком «минус», причем учитываются всевозможные пересечения заданных k множеств $A_1, \ldots, A_k$.

Теперь мы можем решить задачу о плохой погоде, только дополнив ее условие необходимыми сведениями. Итак, пусть число дождливых дней равнялось 12, ветреных — 8, холодных — 4, дождливых и ветреных — 5, дождливых и холодных — 3, ветреных и холодных — 2 и, наконец, дождливых, ветреных и холодных — 1. Тогда общее число плохих дней вычисляется так:

$$n(A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) - \\ - n(A_1 \bigcap A_2) - n(A_1 \bigcap A_3) - n(A_2 \bigcap A_3) + \\ + n(A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3) = 12 + 8 + 4 - 5 - 3 - 2 + 1 = 15.$$

Формула включений и исключений

При выводе формулы (13) подсчитывают для каждого элемента, сколько раз он включается и сколько исключается. Поэтому ее называют *формулой включений и исключений*. Еще ее зовут *формулой перекрытий* — мы учитываем, как перекрываются друг с другом наши множества.

С помощью формулы включений и исключений можно решить и такую задачу. *В множестве U заданы подмножества $A_1, A_2, \ldots, A_k$; известна мощность каждого из этих множеств, а также каждого из пересечений этих множеств друг с другом по 2, по 3 и т. д. Требуется узнать, сколько элементов в U не принадлежат ни одному из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_k$.*

Чтобы ответить на этот вопрос, достаточно вычесть из числа элементов в U число элементов в объединении $A_1 \bigcup A_2 \bigcup \ldots \bigcup A_k$ наших множеств, а оно дается формулой (13). Если обозначить через N' число элементов в U, не принадлежащих ни одному из множеств $A_1, \ldots, A_k$, то

$$N' = n(U) - n(A_1) - \ldots - n(A_k) + n(A_1 \cap A_2) + \ldots$$
$$\ldots + n(A_{k-1} \cap A_k) - n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^k n(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k). \qquad (14)$$

Поскольку N' — число элементов, не попавших ни в одно из множеств $A_1, \ldots, A_k$, а такие элементы как раз образуют долю $A_1' \cap \ldots \cap A_k'$, то N' — мощность этой доли.

Частный случай формулы включений и исключений

Число слагаемых в формуле (14) весьма велико — оно равно 2^k. Но в некоторых случаях удается получить ответ с меньшим числом слагаемых. Это будет в случаях, когда множества $A_1, \ldots, A_k$ расположены так, что число элементов в пересечении нескольких из них зависит лишь от того, сколько множеств пересекают. Иными словами, выполняются такие равенства

$$n(A_1) = n(A_2) = \ldots = n(A_k) = N_1,$$
$$n(A_1 \cap A_2) = n(A_1 \cap A_3) = \ldots = n(A_{k-1} \cap A_k) = N_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) = N_k.$$

В формулу (14) войдет тогда C_k^1 членов, равных N_1, C_k^2 членов, равных N_2 и т. д. Поэтому в случае такого расположения множеств $A_1, \ldots, A_k$ формула включений и исключений принимает вид

$$N' = N_0 - C_k^1 N_1 + C_k^2 N_2 - \ldots + (-1)^k C_k^k N_k, \qquad (15)$$

где $N_0 = n(U)$.

Решето Эратосфена

Одной из самых больших загадок математики является расположение простых чисел в ряду всех натуральных чисел. Иногда два простых числа отличаются только на 2 (например, 17 и 19, 29 и 31), а иногда подряд идет миллион составных чисел. Сейчас специалисты по теории чисел знают уже довольно много о том, сколько простых чисел содержится среди первых n натуральных чисел. Эти подсчеты делаются на основе сложнейших разделов современного математического анализа. Но уже более 100 лет тому назад великому русскому математику П. Л. Чебышеву удалось узнать многое о распределении простых чисел, используя совершенно элементарные методы. В его исследованиях оказался весьма полезным метод отыскания простых чисел, восходящий к древнегреческому ученому Эратосфену (он жил в III в. до н. э. в египетском городе Александрии).

Эратосфен занимался самыми различными вопросами — ему принадлежат интересные исследования в области математики, астрономии и других наук (например, он измерил длину одного градуса широты). Впрочем, такая разносторонность не позволяла получать очень глубоких результатов, и современники называли Эратосфена несколько иронически «во всем второй» (второй математик после Евклида, второй астроном после Гиппарха и т. д.) или «многоборец».

В математике Эратосфена интересовал вопрос о том, как найти все простые числа среди натуральных чисел от 1 до n[1]. Он придумал для этого следующий метод. Сначала вычеркивают все числа, делящиеся на 2, исключая само число 2. Для этого вычеркивают все идущие после 2 числа через одно. Потом вычеркивают все идущие после 3 числа через два на третье (т. е. все числа, делящиеся на 3, кроме 3). Первым оставшимся числом будет 5. Начиная с этого числа вычеркивают каждое пятое число и т. д. Числа, которые уцелеют после всех вычеркиваний, и являются простыми. Так как во времена Эратосфена писали на восковых табличках и не вычеркивали, а выкалывали цифры, то табличка после описанного процесса напоминала решето. Поэтому метод Эратосфена для нахождения простых чисел получил название *решета Эратосфена.*

Вот это решето и применил П. Л. Чебышев для изучения вопроса о распределении простых чисел. Ведь применяя формулу

---

[1] Эратосфен считал 1 простым числом. Сейчас математики считают 1 числом особого вида, не относящимся ни к простым, ни к составным числам.

включений и исключений, легко подсчитать, сколько чисел, меньших n, останется после k вычеркиваний. Подсчитаем, например, сколько чисел уцелеет в первой сотне после трех циклов вычеркиваний. Обозначим через A_1 множество чисел из первой сотни, делящихся на 2, через A_2 — делящихся на 3, через A_3 — делящихся на 5. Тогда $A_1 \cap A_2$ — множество чисел, делящихся на 6, $A_1 \cap A_3$ — делящихся на 10, $A_2 \cap A_3$ — на 15, $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ — на 30. Уцелеют после трех циклов вычеркиваний числа 2, 3, 5, а также все числа, не делящиеся ни на 2, ни на 3, ни на 5, т. е. числа из множества $A_1' \cap A_2' \cap A_3'$. Нам надо теперь сосчитать, сколько чисел в множестве $A_1' \cap A_2' \cap A_3'$. По формуле включений и исключений получаем

$$n(A_1' \cap A_2' \cap A_3') = n(U) - n(A_1) - n(A_2) - n(A_3) + n(A_1 \cap A_2) +$$
$$+ n(A_1 \cap A_3) + n(A_2 \cap A_3) - n(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Но чтобы найти сколько чисел от 1 до N делится на k, надо разделить N на k и взять целую часть получившегося частного. Поэтому $n(A_1) = 50$, $n(A_2) = 33$, $n(A_3) = 20$, $n(A_1 \cap A_2) = 16$, $n(A_1 \cap A_3) = 10$, $n(A_2 \cap A_3) = 6$, $n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 3$ и

$$n(A_1' \cap A_2' \cap A_3') = 100 - 50 - 33 - 20 + 16 + 10 + 6 - 3 = 26.$$

Таким образом, 26 чисел от 1 до 100 не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5. Эти числа и уцелеют после первых трех циклов процесса Эратосфена. Кроме них останутся числа 2, 3, 5, а всего 29 чисел

Задачи к главе III

1. Имеется 5 видов конвертов без марок и 4 вида марок. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для посылки письма?

2. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова «здание»? А из слова «камзол»?

3. Бросают игральную кость с 6 гранями и запускают волчок, имеющий 8 граней. Сколькими различными способами могут они упасть?

4. На вершину горы ведут 7 дорог. Сколькими способами турист может подняться на гору и потом спуститься с нее? Решите ту же задачу при дополнительном условии, что спуск и подъем происходят по разным дорогам.

5. Сколькими способами можно указать на шахматной доске два квадрата — белый и черный? Решите ту же задачу, если нет ограничений на цвет квадратов, а также если надо выбрать два белых квадрата.

6. Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске белый и черный квадраты, не лежащие на одной горизонтали или одной вертикали?

7. Из 12 слов мужского рода, 9 женского и 10 среднего нужно выбрать по одному слову каждого рода. Сколькими способами может быть сделан этот выбор?

8. В букинистическом магазине лежат 6 экземпляров романа И. С. Тургенева «Рудин», 3 экземпляра его же романа «Дворянское гнездо» и 4 экземпляра романа «Отцы и дети». Кроме того, есть 5 томов, содержащих романы «Рудин» и «Дворянское гнездо», и 7 томов, содержащих романы «Дворянское гнездо» и «Отцы и дети». Сколькими способами можно сделать покупку, содержащую по одному экземпляру каждого из этих романов? Решите ту же задачу, если, кроме того, в магазине есть 3 тома, содержащие романы «Рудин» и «Отцы и дети», и 5 томов, содержащих все три романа.

9. Имеются 3 волчка с 6, 8 и 10 гранями соответственно. Сколькими различными способами они могут упасть? Решите ту же задачу, если известно, что по крайней мере два волчка упали на сторону, помеченную цифрой 1.

10. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды карт, содержащей 52 карты, по одной карте каждой масти так, чтобы карты красных мастей и карты черных мастей образовывали пары (например, девятки пик и треф и валеты бубен и червей)? Решите эту же задачу, если требуется, чтобы из выбранных карт можно было составить две пары, состоящие из черной и красной карт одного и того же названия (например, валеты пик и червей и дамы треф и бубен).

11. Сколькими способами можно сделать трехцветный флаг с горизонтальными полосами одинаковой ширины, если имеется материя 6 различных цветов? Та же задача, если один из цветов должен быть красным.

12. Сколько словарей надо издать, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из пяти языков: русского, английского, французского, немецкого, итальянского, на любой другой из этих пяти языков. На сколько больше словарей придется издать, если число различных языков равно 10?

13. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды в 52 карты по одной карте каждой масти? Решите ту же задачу при дополнительном условии, что среди выбранных карт нет ни одной пары карт, отличающихся лишь мастью, т. е. двух королей, двух десяток.

14. Надо послать 6 срочных писем. Сколькими способами это можно сделать, если для передачи писем можно послать трех курьеров, и каждое письмо можно дать любому из курьеров?

15. Сколькими способами можно посадить за круглый стол 5 мужчин и 5 женщин так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом?

16. На железнодорожной станции имеется n светофоров. Сколько может быть дано различных сигналов при помощи этих светофоров, если каждый светофор имеет три состояния: горит либо зеленый, либо желтый, либо красный свет. Решите ту же задачу, если допускаются всевозможные комбинации огней каждого светофора (например, горят зеленый и красный огни всех светофоров).

17. Сколькими способами можно выбрать 3 краски из имеющихся 5 различных красок?

18. Пять девушек и трое юношей играют в городки. Сколькими способами они могут разбиться на две команды по 4 человека, если хотя бы один юноша входит в каждую команду?

19. У одного человека есть 7 книг по математике, а у другого — 9 книг. Сколькими способами они могут обменять 3 книги одного на 3 книги другого?

20. Из колоды, содержащей 52 карты, вынули 10 карт. Во скольких случаях среди этих карт есть хотя бы один туз? Во скольких случаях будет ровно 1 туз? Во скольких случаях не менее двух тузов? Ровно два туза?

21. В некотором государстве не было двух жителей с одинаковым набором зубов. Какова может быть наибольшая численность населения этого государства (во рту человека может быть не более 32 зубов)?

22. Из состава конференции, на которой присутствуют 52 человека, надо избрать президиум в составе 5 человек и делегацию в составе 3 человек. Сколькими способами может быть произведен выбор, если

а) члены президиума могут войти в состав делегации,

б) члены президиума не могут войти в состав делегации?

23. У мамы 2 яблока и 3 груши. Каждый день в течение 5 дней она выдает сыну по одному фрукту. Сколькими способами это может быть сделано? Решите аналогичную задачу, если яблок n, а груш k.

24. Из группы, состоящей из 7 мужчин и 4 женщин, надо выбрать 6 человек так, чтобы среди них было не менее 2 женщин. Сколькими способами это может быть сделано?

25. В купе железнодорожного вагона имеется два противоположных дивана по 5 мест в каждом. Из 10 пассажиров четверо желают сидеть по движению поезда, трое — против движения, остальным трем безразлично, как сидеть. Сколькими способами могут разместиться пассажиры?

26. В местком избрано 9 человек. Из них надо выбрать председателя, заместителя председателя и культорга. Сколькими способами это можно сделать?

27. Автомобильные номера состоят из одной, двух или трех букв и четырех цифр. Найти число таких номеров, если используются 32 буквы.

28. У мамы 2 яблока, 3 груши и 4 апельсина. Каждый день в течение 9 дней подряд она выдает по одному фрукту. Сколькими способами это может быть сделано?

29. У отца есть 5 различных апельсинов, которые он дает своим 8 сыновьям, причем каждый получает или один апельсин, или ничего. Сколькими способами это можно сделать? Решите ту же задачу, если число апельсинов, получаемых каждым сыном, не ограничено.

30. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы слова «метаматематика»? А слова «ингредиент»?

31. Из спортивного клуба, насчитывающего 30 членов, надо составить команду из 4 человек для участия в беге на 1000 *м*. Сколькими способами это можно сделать? А сколькими способами можно составить команду из 4 человек для участия в эстафете $100 + 200 + + 400 + 800$?

32. Сколькими способами можно расставить белые фигуры (короля, ферзя, 2 ладьи, 2 слонов и 2 коней) на первой линии шахматной доски?

33. Имеется n абонентов телефонной сети. Сколькими способами можно одновременно соединить три пары абонентов?

34. Сколькими способами могут выпасть 3 игральные кости? Во скольких случаях хотя бы одна кость откроется на 6 очках? Во скольких случаях ровно одна кость откроется на 6 очках? Во скольких случаях одна кость откроется на 6 очках, а одна — на 3 очках?

35. В почтовом отделении продаются открытки 10 видов. Сколькими способами можно купить в нем 12 открыток? Сколькими способами можно купить 8 открыток? Сколькими способами можно купить 8 различных открыток?

36. Сколько различных четырехзначных чисел, делящихся на 4, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, если каждая цифра может встречаться несколько раз? Решите ту же задачу при условии, что каждая цифра встречается лишь один раз.

37. В соревновании по гимнастике участвуют 10 человек. Трое судей должны независимо друг от друга перенумеровать их в порядке, отражающем их успехи в соревновании по мнению судей. Победителем считается тот, кого назовут первым хотя бы двое судей. В какой доле случаев соревнований победитель будет определен?

38. Четверо студентов сдают экзамен. Сколькими способами могут быть поставлены им отметки, если известно, что никто из них не получил неудовлетворительной отметки?

39. Сколько ожерелий можно составить из 5 одинаковых бусинок и 2 одинаковых бусинок большего размера?

40. Компания из 7 юношей и 10 девушек танцует. Сколько имеется вариантов участия девушек в танце, в котором танцуют все юноши? Сколько имеется вариантов, если учитывать лишь то, какие девушки остались неприглашенными? Ответьте на те же вопросы, если относительно двух девушек можно с уверенностью сказать, что они будут приглашены на танец.

41. На школьном вечере присутствуют 12 девушек и 15 юношей. Сколькими способами можно выбрать из них 4 пары для танца?

42. Из точек и тире составляются всевозможные кортежи длины 7. Какое наибольшее число кортежей можно выбрать так, чтобы любая пара кортежей отличалась по крайней мере в трех позициях?

43. Сколько чисел, меньших миллиона, можно написать с помощью цифр: а) 9, 8, 7; б) 9, 8, 0 (цифра 0 не должна быть первой)?

44. Найдите сумму всех трехзначных чисел, которые можно написать с помощью цифр 1, 2, 3, 4. Решите ту же задачу, если никакая цифра не должна повторяться дважды в записи каждого числа.

45. Найдите сумму всех пятизначных чисел, которые можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, что ни одна цифра не повторяется дважды. Решите ту же задачу для пятизначных чисел, которые можно записать цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

46. Сколько нечетных чисел можно составить из цифр числа 3694 (каждую цифру можно использовать не более одного раза). Сколько четных чисел можно составить из цифр того же числа?

47. Во скольких шестизначных числах есть 3 четные и 3 нечетные цифры? Решите ту же задачу, если допускаются и «шестизначные» числа, начинающиеся с нуля.

48. Во скольких шестизначных числах сумма цифр четна

(допускаются лишь шестизначные числа, первая цифра которых отлична от 0)?

49. Во скольких десятизначных числах сумма цифр равна 3 (первая цифра предполагается отличной от 0)? Решите ту же задачу, если берутся не десятизначные числа, а все числа от 1 до 9 999 999 999 включительно.

50. Во скольких девятизначных числах все цифры различны?

51. Во сколько чисел от 0 до 999 входит цифра 9? Во сколько чисел она входит дважды? Во сколько чисел входит цифра 0? Во сколько чисел она входит дважды? Во сколько чисел входят цифры 0 и 9? А цифры 8 и 9?

52. Во скольких числах от 0 до 999 999 нет двух стоящих рядом одинаковых цифр?

53. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр числа 123 153?

54. Переплетчик должен переплести 12 различных книг в красный, зеленый и коричневый переплеты. Сколькими способами он может это сделать, если в каждый цвет должна быть переплетена хотя бы одна книга?

55. Сколько различных браслетов можно сделать из 5 одинаковых изумрудов, 6 одинаковых рубинов и 7 одинаковых сапфиров (в браслет входят все 18 камней)?

56. В комнате студенческого общежития живут трое студентов. У них есть 4 чашки, 5 блюдец и 6 чайных ложек (все чашки, блюдца и ложки отличаются друг от друга). Сколькими способами они могут накрыть стол для чаепития (каждый получает чашку, блюдце и ложку)?

57. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды, содержащей 52 карты, 6 карт так, чтобы среди них были все 4 масти?

58. Человек имеет 6 друзей и в течение 20 дней приглашает к себе в гости троих из них так, что компания ни разу не повторяется. Сколькими способами он может это сделать?

59. Трое юношей и 2 девушки выбирают себе место работы. В городе есть 3 завода, где требуются рабочие в литейные цехи (туда берут лишь мужчин), 2 ткацкие фабрики, куда берут лишь женщин, и 2 фабрики, куда требуются и мужчины, и женщины. Сколькими способами они могут распределиться между этими предприятиями?

60. Берутся кости домино от $(0, 0)$ до (n, n). Показать, что число костей с суммой очков $n - r$ равно числу костей с суммой очков $n + r$ и что это число равно $\frac{1}{4}(2n - 2r + 3)$. Найти общее число всех костей домино.

61. Рота состоит из 3 офицеров, 6 сержантов и 60 рядовых. Сколькими способами можно выделить из них отряд, состоящий из офицера, 2 сержантов и 20 рядовых? Решите ту же задачу, если в отряд должны войти командир роты и старший по возрасту из сержантов.

62. Имеется 3 курицы, 4 утки и 2 гуся. Сколькими способами можно выбрать из них несколько птиц так, чтобы среди выбранных оказались и куры, и утки, и гуси?

63. Сколькими способами можно выбрать из 15 человек группу людей для работы, если группа должна состоять не менее чем из 5 людей? Та же задача, если число людей n, а наименьшее число людей в группе p.

64. Сколькими способами можно выбрать 12 человек из 17, если данные двое человек из них не могут быть выбраны вместе? Сколькими способами можно выбрать m человек из n так, чтобы данные p человек не были выбраны вместе?

65. У ювелира есть 5 одинаковых изумрудов, 8 одинаковых рубинов и 7 одинаковых сапфиров. Сколькими способами он может выбрать из них 3 камня для брошки?

66. У мужа 12 знакомых — 5 женщин и 7 мужчин, а у жены — 7 женщин и 5 мужчин (иные, чем у мужа). Сколькими способами можно составить компанию из 6 мужчин и 6 женщин так, чтобы 6 человек пригласил муж и 6 — жена?

67. На каждом борту лодки сидят по 4 человека. Сколькими способами можно выбрать команду для этой лодки, если есть 31 кандидат, причем 10 человек хотят сидеть на левом борту лодки, 12 — на правом, а для 9 безразлично, где сидеть?

68. В урне лежат жетоны с числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Из нее вынимают 3 жетона. Во скольких случаях сумма написанных на них чисел будет равна 9? Не меньше 9?

69. Труппа состоит из 10 артистов. Сколькими способами можно выбирать из нее в течение двух вечеров по 6 человек для участия в спектаклях так, чтобы эти составы не совпадали друг с другом?

70. Для премий на математической олимпиаде выделено 3 экземпляра одной книги, 2 экземпляра другой и 1 экземпляр третьей. Ни одному участнику не дают двух одинаковых книг (но могут дать две или три различные книги). Сколькими способами могут быть вручены премии?

71. Сколько существует пятизначных чисел? Во скольких из них все цифры четны? Во скольких все цифры нечетны? Во сколько не входят цифры, меньшие шести? Во скольких нет цифр, больших трех? Сколько из них содержат все цифры 1, 2, 3, 4, 5? Сколько содержат все цифры 0, 2, 4, 6, 8?

72. На первые две линии шахматной доски произвольным образом ставятся белые и черные фигуры (по два коня, два слона, две ладьи, ферзь и король каждого цвета). Сколькими способами можно это сделать? Сколькими способами можно расставить те же фигуры по всей доске? Решите ту же задачу, если расставляются и все пешки (по 8 пешек каждого цвета).

73. Сколькими способами можно поставить 15 белых и 15 черных шашек на 24 поля так, чтобы на каждом поле были только белые или только черные шашки (так расставляют шашки при игре в «нарды»)?

74. Сколько и каких цифр понадобится, чтобы написать все числа от 1 до 999 999 включительно? А от 1 до $10^n - 1$ включительно?

75. Сколько различных десятизначных чисел можно написать, пользуясь тремя цифрами 1, 2, 3 при дополнительном условии, что цифра 3 используется в каждом числе ровно два раза? Сколько из написанных чисел делится на 9?

76. Сколько беспорядков во всех перестановках чисел 1, 2, . . ., n? (относительно определения числа беспорядков см. стр. 44).

77. Найдите число прямоугольников, составленных из клеток шахматной доски с m горизонталями и n вертикалями, которые содержат клетку с координатами (p, q). Для какой клетки это число наибольшее, а для какой—наименьшее?

78. Найдите сумму всех четырехзначных чисел, не делящихся ни на 2, ни на 3, ни на 5.

79. На плоскости нанесена квадратная сетка. Докажите, что число ломаных, выходящих из угла A этой сетки, составленных из отрезков сетки и имеющих длину N, не превосходит $4 \cdot 3^{N-1}$ (ломаная не может пробегать дважды один и тот же отрезок). До сих пор не решена задача о числе ломаных такого вида, ни разу не пересекающих себя.

80. Найдите наибольшее число подмножеств n-множества X, таких, что ни одно из выделенных подмножеств не входит целиком в другое.

81. В группе из 16 детей 7 родились в Москве, 4 — в Ленинграде, 3 — в Киеве и 2 — в Минске. Сколькими способами можно выбрать из них 4 детей так, чтобы в группе были уроженцы всех 4 городов?

82. Сколькими способами можно построить замкнутую ломаную, вершинами которой являются вершины правильного шестиугольника (ломаная может быть самопересекающейся)?

83. Сколько существует функций, заданных на n-множестве X и принимающих значения в том же множестве?

84. Сколько существует семизначных телефонных номеров, в первых 3 цифрах которых не встречаются цифры 0 и 9?

85. Из 12 девушек и 10 юношей выбирают команду в составе 5 человек. Сколькими способами можно выбрать эту команду так, чтобы в нее вошло не более 3 юношей?

86. Имеется 4 белых шара, 3 синих и 3 красных. Сколькими способами можно составить из них кортежи длины n, если $n = 1, 2, 3, 4, 5$?

87. Сколькими способами можно извлечь из колоды в 52 карты 5 карт так, чтобы они были одной масти и шли подряд (например, туз, двойка, тройка, четверка, пятерка или десятка, валет, дама, король, туз)? Сколькими способами можно извлечь 5 карт одной масти? Сколькими способами можно извлечь 5 карт произвольной масти, идущих подряд?

88. Сколько можно составить пятибуквенных слов из 7 гласных и 25 согласных букв, если гласные и согласные буквы должны чередоваться? Сколько из этих слов начинаются гласной буквой и сколько согласной? Решите те же задачи, если ни одна буква не повторяется дважды.

89. Сколько существует пятизначных четных чисел, в которых ни одна цифра не повторяется дважды?

90. Комиссия из 7 человек хранит свои материалы в сейфе. Сколько замков должно быть на сейфе и сколько ключей должно быть у каждого члена комиссии, для того чтобы сейф мог быть открыт, когда соберутся любые 4 члена комиссии, но не мог быть открыт при меньшем числе членов? Сколько ключей должен иметь руководитель учреждения для того, чтобы он мог открыть сейф вместе с любым членом комиссии?

91. Сколькими способами можно выбрать 5 букв из множества а, а, а, а, а, б, б, б, в, в, г, г, г, д, д, е, ж, ж, ж, ж?

Сколько слов длины 5 можно составить из тех же букв?

92. Найдите наибольшее число точек пересечения 7 прямых и 4 окружностей между собой.

93. Из натуральных чисел от 1 до n включительно составлены всевозможные произведения, содержащие k различных сомножителей (k фиксировано). Сколько из этих произведений делится на простое число p, не превосходящее n?

94. На плоскости даны 5 точек, причем среди прямых, соединяющих эти точки, нет параллельных, перпендикулярных или совпадающих. Проводим через каждую из 5 точек перпендикуляры ко всем прямым, которые можно построить, соединяя остальные 4 точки. Каково максимальное число точек пересечения между собой этих перпендикуляров, не считая данные 5 точек?

95. Сколькими способами можно посадить за круглый стол 7 мужчин и 7 женщин так, чтобы никакие две женщины не сидели рядом?

96. Сколькими способами можно выбрать из 16 лошадей шестерку для запряжки так, чтобы в нее вошли 3 лошади из шестерки $ABC\ A'B'C'$, но не вошла ни одна из пар AA', BB', CC'?

97. Сколькими способами можно составить из 9 согласных и 7 гласных слова, в которые входят 4 различных согласных и 3 различных гласных? Во скольких из этих слов никакие две согласные не стоят рядом?

98. Найти количество шестизначных чисел, таких, что сумма трехзначного числа, образованного первыми тремя цифрами, и трехзначного числа, образованного последними тремя цифрами, меньше 1000.

99. Сколькими способами можно переставить буквы слова «кофеварка» так, чтобы гласные и согласные буквы чередовались? Решите ту же задачу для слова «самовар».

100. Сколькими способами можно выбрать 4 буквы из слова «тартар», если не учитывать порядка выбираемых букв? Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр числа 123123?

101. Сколько неотрицательных целых чисел, меньших 1000 000, содержат все цифры 1, 2, 3, 4? Сколько чисел состоит только из этих цифр?

102. Найдите сумму четырехзначных чисел, получаемых при всевозможных перестановках следующих 4 цифр:

а) 1, 2, 3, 4; б) 1, 2, 2, 5; в) 1, 3, 3, 3; г) 1, 1, 4, 4.

103. Найдите сумму всех пятизначных чисел, которые можно получить, переставляя цифры 0, 1, 2, 3, 4 (цифра 0 не должна быть первой).

104. Сколькими способами можно расставить 12 белых и 12 черных шашек на черных полях доски?

105. Сколькими способами можно выбрать из слова «логарифм» 3 согласных и 1 гласную букву? Та же задача, если среди выбранных букв должна быть буква «ф».

106. Сколькими способами можно переставлять буквы слова «пастухи» так, чтобы и гласные и согласные шли в алфавитном порядке?

107. Сколькими способами можно переставлять буквы слова «Абакан» так, чтобы согласные шли в алфавитном порядке?

108. Сколько чисел, меньших миллиона, можно написать с помощью цифр 8 и 9?

109. Сколькими способами можно выбрать из натуральных чисел от 1 до 20 два числа так, чтобы их сумма была нечетной?

110. Сколькими способами можно выбрать из натуральных чисел от 1 до 30 три натуральных числа так, чтобы их сумма была четной?

111. Из колоды в 52 карты двое выбирают по 4 карты каждый. Сколько возможно различных выборов? Во скольких случаях один из них получит четыре туза, а другой — четыре короля?

112. Сколько целых чисел от 0 до 999 не делятся ни на 5, ни на 7? А сколько чисел от 0 до 999 не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5, ни на 7?

113. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр числа 12 335 233?

114. В отделе научно-исследовательского института работают несколько человек, причем каждый из них знает хотя бы один иностранный язык, 6 человек знают английский, 6 — немецкий, 7 — французский, 4 знают английский и немецкий, 3 — немецкий и французский, 2 — французский и английский, 1 человек знает все три языка. Сколько человек работает в отделе? Сколько из них знают только английский язык? Только французский? Сколько человек знает ровно 1 язык?

115. На загородную прогулку поехали 92 человека. Бутерброды с колбасой взяли 48 человек, с сыром — 38 человек, с ветчиной — 42 человека, с сыром и колбасой — 28 человек, с колбасой и ветчиной — 31 человек, с сыром и ветчиной — 26 человек. 25 человек взяли с собой все три вида бутербродов, а несколько человек вместо бутербродов взяли пирожки. Сколько человек взяли с собой пирожки?

116. Два экзаменатора, работая одновременно, экзаменуют группу в 12 человек по двум предметам. Каждый экзаменующийся отвечает по 5 минут по каждому предмету. Сколькими способами могут экзаменаторы распределить между собой работу так, чтобы ни одному экзаменующемуся не пришлось отвечать сразу по двум предметам?

117. Сколькими способами 6 человек могут выбрать из 6 пар перчаток по правой и левой перчатке так, чтобы ни один не получил пары? Решите ту же задачу для 6 человек и 9 пар перчаток.

118. Клетки шахматной доски раскрашиваются в 8 цветов так, что в каждом горизонтальном ряду встречаются все 8 цветов, а в каждом вертикальном ряду не встречаются подряд две клетки одного цвета. Сколькими способами возможна такая раскраска?

119. Сколько можно составить из 32 букв шестибуквенных слов, содержащих хотя бы один раз букву «а»?

120. Сколькими способами можно пройти шахматным королем из одного угла шахматной доски в другой за 10 ходов?

121. На клетчатой бумаге начерчен квадрат со стороной n клеток. Сколько существует прямоугольников ширины p, состоящих из этих клеток (шириной прямоугольника называют длину меньшей из его сторон, ширина квадрата равна длине его стороны)?

122. У меня 7 друзей. Сколькими способами я могу приглашать их к себе обедать по 3 в течение 7 дней так, чтобы никакие 3 из них не встретились у меня дважды? Сколькими способами я могу составить из них 7 компаний по 3 так, чтобы никто не остался неприглашенным? Сколькими способами можно составить 7 компаний по 3 так, чтобы ни один из друзей не был у меня каждый день?

123. На листе бумаги нанесена сетка из n горизонтальных и n вертикальных прямых. Сколько различных $2n$-звенных замкнутых ломаных можно провести по линиям сетки так, чтобы каждая ломаная имела звенья на всех горизонтальных и всех вертикальных прямых?

124. Выписаны все сочетания с повторениями из n букв по n. Сколько раз повторяется в них каждая буква?

125. Найдите сумму всех четырехзначных четных чисел, в которые входят лишь цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5 (цифры могут повторяться в числах).

126. Найдите сумму всех четырехзначных чисел, которые можно составить из цифр от 1 до 6 и которые делятся на 3.

127. Каких чисел от 1 до 10 000 000 больше: тех, в записи которых встречается единица, или тех, в которых она не встречается?

128. Докажите, что число различных размещений с повторениями, которые можно сделать из m белых и n черных шаров, равно $P(m+1,\ n+1)-2$ (пустое размещение отбрасывается). Докажите, что число белых шаров в этих размещениях равно

$$1+\frac{mn+m-1}{n+2}P(m+1, n+1).$$

129. Докажите, что число размещений с повторениями из m белых, n черных и одного красного шара, в которые входит красный шар, равно

$$1+\frac{mn+m+n}{m+n+4}P(m+2, n+2),$$

а полное число размещений равно

$$\frac{(m+1)(n+1)}{m+n+3}P(m+2, n+2)-1$$

(пустое размещение отброшено).

130. На плоскости проведено n прямых так, что никакие две из них не параллельны друг другу и никакие три не проходят через одну точку. Сколько получилось треугольников, стороны которых лежат на этих прямых?

131. На плоскости задано n точек, из которых p лежат на одной прямой, а кроме них никакие три точки не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников, вершинами которых являются эти точки?

132. На прямой взяты p точек, а на параллельной ей прямой еще q точек. Сколько существует треугольников, вершинами которых являются эти точки?

133. Пусть при том же условии на третьей прямой, параллельной данным, взяты r точек, причем никакие три точки не лежат на прямой, пересекающей все три параллельные прямые. Сколько получится дополнительных треугольников?

134. Каждая сторона квадрата разбита на n частей. Сколько можно построить треугольников, вершинами которых являются точки деления?

135. На плоскости проведены n прямых линий, из которых никакие две не являются параллельными и никакие три не пере-

секаются в одной точке? Сколько точек пересечения имеют эти прямые?

136. На плоскости проведено n прямых линий, из которых p проходят через точку A и q — через точку B, а кроме них никакие три прямые не проходят через одну точку, никакая прямая не проходит через точки A и B одновременно и никакие две прямые не параллельны. Сколько точек пересечения имеют эти прямые?

137. На плоскости проведены n прямых линий, никакие три из которых не проходят через одну точку. Сколькими способами можно выбрать m точек пересечения этих прямых, никакие три из которых не лежат на одной прямой?

138. Имеется n точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Сколько можно провести r-звенных ломаных с вершинами в этих точках?

139. На одной прямой взято p точек, а на параллельной ей прямой q точек. Через каждую пару выбранных точек, лежащих на разных прямых, проводят прямую линию, причем никакие три из проведенных прямых не проходят через одну точку. Найти число точек пересечения проведенных прямых. Сколько из них лежат между заданными прямыми? (Точки на заданных прямых не учитываются.)

140. Даны n точек на плоскости, никакие 4 из которых не лежат на одной окружности. Через каждые три точки проводят окружность. Каково наибольшее число точек пересечения этих окружностей?

141. Даны n точек на плоскости, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой и никакие 4 — на одной окружности. Через каждые две точки проводится прямая, а через каждые 3 — окружность. Найти наибольшее число точек пересечения всех проведенных прямых со всеми окружностями.

142. В пространстве даны n точек, никакие 4 из которых не лежат на одной плоскости. Через каждые 3 точки проводится плоскость, причем никакие две из этих плоскостей не параллельны друг другу. Найти число прямых, получающихся при пересечении этих плоскостей.

143. В пространстве дано n точек, из которых p лежат в одной плоскости, а остальные расположены так, что никакие 4 из них не лежат в одной плоскости. Сколько можно провести плоскостей, каждая из которых содержит по 3 из заданных точек?

144. Через каждую из трех данных точек проведем по p прямых так, чтобы среди них не было двух, параллельных между собой, и трех, пересекающихся в одной точке. Найти число точек пересечения этих прямых.

145. На плоскости даны три точки A, B и C. Проведем через точки A, B, C соответственно p, q, r прямых. При этом среди проведенных прямых нет трех, пересекающихся в одной точке, и двух, параллельных между собой. Найти число треугольников, вершины которых являются точками пересечения этих прямых и не совпадают с заданными точками A, B, C.

146. Сколько существует целочисленных треугольников, длины сторон которых удовлетворяют неравенствам $n < x, y, z \leqslant 2n$? Сколько среди этих треугольников равнобедренных и сколько равносторонних?

147. Докажите, что число целочисленных треугольников, длины сторон которых не превосходят $2n$, равно $\frac{1}{6}n(n+1)(4n+5)$. Если же исключить равнобедренные треугольники, то останется $\frac{1}{6}n(n-1)(4n-5)$ треугольников.

148. Докажите, что существует $\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$ целочисленных треугольников, длины сторон которых не превосходят $2n-1$, из них $\frac{1}{6}(n-1)(n-2)(4n-3)$ не являются равнобедренными.

149. Из n отрезков длины $1, 2, \ldots, n$ выбирают 4 так, чтобы они были длинами сторон описанного четырехугольника. Докажите, что это можно сделать

$$\frac{1}{48}[2n(n-2)(2n-5)-3+3(-1)^n]$$

способами. Сколько получится четырехугольников, если можно брать стороны одинаковой длины?

150. Сколько можно построить различных прямоугольных параллелепипедов, длины ребер которых — целые числа от 1 до n?

151. На плоскости проведено n прямых, и на каждой из них взято по p точек так, что ни одна из них не является точкой пересечения прямых и никакие три не лежат на одной прямой, отличной от заданных. Найдите число треугольников с вершинами в этих точках.

152. Найдите число точек пересечения диагоналей выпуклого n-угольника, лежащих внутри него и лежащих вне него (предполагается, что никакие две диагонали не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке).

153. На окружности отмечено n точек. Сколько существует различных многоугольников (необязательно выпуклых), вписанных в эту окружность, вершинами которых служат данные точки? А сколько выпуклых многоугольников?

154. На плоскости проведено n параллельных прямых. Кроме того, на той же плоскости проведено m прямых, не параллельных ни между собой, ни ранее проведенным прямым. Ни одна из прямых не проходит через точку пересечения двух других прямых. На сколько частей делится плоскость этими прямыми?

155. Дано n точек, из которых p лежат на одной окружности. Кроме этих точек никакие четыре не лежат на одной окружности. Сколько можно провести окружностей, чтобы они содержали тройку заданных точек?

156. На плоскости проведено n прямых, из которых p касаются данной окружности, а кроме них никакие четыре прямые не касаются одной и той же окружности. Сколько можно провести окружностей, касающихся трех из заданных прямых?

157. Параллелограмм пересекается двумя рядами прямых, параллельных его сторонам; каждый ряд состоит из n линий. Сколько параллелограммов в получившейся фигуре?

158. Сколькими способами можно вынуть 4 карты из полной колоды в 52 карты так, чтобы получилось две масти? Решите ту же задачу, если должно получиться три масти.

159. Сколько шестизначных чисел содержат ровно три различные цифры?

160. Сколько n-значных чисел содержит ровно k различных цифр?

161. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — некоторые целые числа. Кортеж длины n из нулей и единиц называется правильным, если он содержит не менее двух единиц. Докажите, что число правильных кортежей, для которых $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$, не превосходит числа остальных правильных кортежей.

162. В составлении 40 задач принимало участие 30 студентов со всех пяти курсов. Любые два однокурсника придумали поровну задач, а любые два студента с разных курсов — разное число задач. Сколько человек придумало одну задачу?

163. Некоторые из n точек соединены отрезками так, что каждая из точек соединена с p точками. Какие значения может принимать p?

164. В классе 41 ученик написал по 3 контрольные работы, причем ни один из них не получил по этим работам неудовлетворительной отметки и каждый получил все 3 возможные отметки. Найдите наименьшее число учеников, получивших одинаковые отметки по всем 3 контрольным. Решите ту же задачу, если число возможных отметок равно 4.

165. Сколько нечетных чисел в m-й строке арифметического треугольника?

166. Сколько не делящихся на простое число p чисел стоит в первых m строках арифметического треугольника?

167. Докажите, что не существует такого числа k, что в k-й строке арифметического треугольника поровну четных и нечетных чисел.

168. Обозначим через $s(n, j)$ сумму произведений $a_1 \ldots a_j$, где $(a_1, \ldots, a_j)$ пробегают все наборы натуральных чисел, такие, что $1 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_j$. Докажите, что для любого натурального числа n верно равенство

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (n-k)!\, s(n-k, k) = 1$$

(по определению считаем $s(0, j) = s(n, 0) = 1$).

Глава IV

КОМБИНАТОРИКА РАСКЛАДОК И РАЗБИЕНИЙ

Шары и лузы

Удар! И 15 перенумерованных биллиардных шаров, только что покоившихся на зеленом сукне стола, рассыпались в разные стороны. А затем серия виртуозных ударов и все шары забиты в лузы, а на столе остался только биток — шар, которым забивают все остальные. Предположим, что забитые шары остаются лежать в лузах до конца игры, а сетки луз настолько велики, что могут вместить все 15 шаров. Тогда возникает следующая комбинаторная задача.

Сколькими способами могут распределиться 15 биллиардных шаров в 6 лузах?

Эта задача сводится к подсчету числа кортежей. Перенумеруем лузы и поставим в соответствие каждому шару номер лузы, в которую он попал. Например, схема

Шары	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Лузы	3	2	2	1	6	4	4	6	3	1	2	1	6	3	6

говорит о том, что в первой лузе лежат 4-й, 10-й и 12-й шары, во второй — 2-й, 3-й и 11-й, в третьей — 1-й, 9-й и 14-й, в четвертой — 6-й и 7-й, а в шестой — 5-й, 8-й, 13-й и 15-й; пятая же луза оказалась пустой. Но вторая строка этой схемы не что иное, как кортеж длины 15, составленный из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 (хотя цифра 5 в нем и отсутствует, она присутствует в схемах, соответствующих другому распределению шаров). Поэтому число таких распределений шаров равно числу размещений с повторениями из 6 элементов по 15, т. е. 6^{15}.

Если бы число шаров равнялось n, а луз — m, то получилось бы m^n вариантов размещения шаров по лузам.

Мы доказали, что *число способов раскладки n различных предметов по m различным ящикам равно m^n.*

Иной ответ получился бы, если бы игра шла ненумерованными шарами. В этом случае мы не могли бы говорить о том, какой шар попал в ту или иную лузу, а интересовались бы лишь тем, сколько шаров попало в каждую лузу. Иными словами, в кортеже, составленном из номеров луз, нас интересовал бы не порядок элементов кортежа (ведь расставить номера по порядку мы можем лишь в случае, когда шары занумерованы), а его состав. Но число различных составов кортежей длины 15, состоящих из 6 элементов, равно $\overline{C}_6^{15} = C_{20}^{15}$ (см. стр. 86). Вообще справедливо следующее утверждение.

Число способов размещения n одинаковых предметов по m различным ящикам равно

$$\overline{C}_m^n = C_{m+n-1}^n = C_{m+n-1}^{m-1}. \tag{1}$$

Если потребовать, чтобы в каждом ящике лежал хотя бы один предмет, то число способов раскладки окажется меньшим. В этом случае сначала надо положить в каждый из ящиков по одному предмету, а потом оставшиеся $n - m$ предметов класть произвольным образом, а это можно сделать C_{n-1}^{m-1} способами.

Возможны промежуточные случаи, например, когда шары покрашены в белый, черный и синий цвета, причем число черных шаров равно 7, белых — 3, а остальные 5 шаров синие. В этом случае надо сначала отдельно подсчитать число способов распределения черных шаров по 6 лузам, потом — белых шаров и, наконец, сделать то же самое для синих шаров. Поскольку мы считаем черные шары неотличимыми друг от друга, равно как и белые, и синие, то эти распределения могут быть сделаны соответственно C_{12}^7, C_8^3 и C_{10}^5 способами. Но распределения шаров разного цвета не зависят друг от друга, и потому в силу правила произведения общее число способов распределения равно $C_{12}^7 \cdot C_8^3 \cdot C_{10}^5 = C_{12}^5 \cdot C_8^5 \cdot C_{10}^5$.

Вообще *если имеется n_1 предметов одного сорта, n_2 предметов другого сорта ,..., n_k предметов k-го сорта, причем предметы одного и того же сорта неотличимы друг от друга, то число способов распределения этих предметов по m различным ящикам равно*

$$C_{n_1+m-1}^{m-1} \cdot C_{n_2+m-1}^{m-1} \cdots C_{n_k+m-1}^{m-1}. \tag{2}$$

В частности, если $m = 2$ (например, если предметы распределяются между двумя людьми), то число способов разбиения равно

$$(n_1 + 1)(n_2 + 1) \dots (n_k + 1) \qquad (3)$$

(поскольку $C^1_{n+1} = n + 1$).

Партия в преферанс

При игре в преферанс каждому из 3 игроков раздают по 10 карт, а 2 карты кладут в прикуп (игра ведется колодой из 32 карт). Сколько различных сдач возможно в этой игре?

Чтобы решить эту задачу, разложим все карты в определенном порядке (например, сначала все пики от семерки до туза, потом в том же порядке все трефы, все бубны, все черви). А затем над каждой картой надпишем номер того игрока, которому она досталась (над картами, идущими в прикуп, пишем цифру 4). Так как каждый из игроков должен получить по 10 карт, то надписанные сверху цифры образуют перестановку с повторениями, состоящую из 10 цифр 1, 10 цифр 2, 10 цифр 3 и 2 цифр 4. Эта перестановка с повторениями имеет состав (10, 10, 10, 2). А число перестановок с повторениями такого состава равно

$$32!/(10!)^3\, 2! = 2\ 753\ 294\ 408\ 504\ 640.$$

Этим 16-значным числом и выражается количество различных сдач при игре в преферанс.

Совершенно так же доказывается, что *число способов разложить $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ предметов по m различным ящикам так, чтобы в первый ящик легло n_1 предметов, во второй — n_2 предметов, ..., в m-й — n_m предметов, равно $P(n_1, n_2, \dots, n_m)$.*

Чтобы доказать это утверждение, сначала расставим все предметы в ряд и занумеруем их, а потом надпишем над каждым предметом номер ящика, в который его кладут. Из условия следует, что номера ящиков образуют перестановку с повторениями, состоящую из n_1 чисел 1, n_2 чисел 2, ..., n_m чисел m. Каждая такая перестановка определяет свой способ раскладки, а число таких перестановок как раз равно $P(n_1, n_2, \dots, n_m)$.

Сушка грибов

Из 60 различных белых грибов хотят сделать 4 связки по 15 грибов в каждой. Сколькими способами это можно сделать?

На первый взгляд эта задача относится к разобранному выше типу, и ответ дается числом $60!/(15!)^4$. Но здесь есть одна тонкость — при сдаче карт важно, кому из игроков достанется данная пачка карт. А при составлении связок их порядок роли не играет — в кладовой все они будут висеть вместе. Поэтому ответ надо еще разделить на 4! — число перестановок связок между собой. Поэтому здесь ответ такой: $60!/(15!)^4 4!$

Вообще *если надо разделить mp различных предметов на m групп по p предметов в каждой группе, причем группы неразличимы друг от друга, то число способов раздела равно*

$$\frac{(mp)!}{(p!)^m m!}$$

Более общей является такая задача: *n различных элементов распределены на m групп так, чтобы m_1 групп содержали по p_1 элементов, m_2 групп — по p_2 элементов, . . ., m_k групп — по p_k элементов ($m = m_1 + \ldots + m_k$ и $n = m_1p_1 + \ldots + m_kp_k$). Сколькими способами может быть произведен раздел если:*

а) *группы различимы друг от друга,*

б) *группы неразличимы друг от друга* (например, предметы кладутся в одинаковые ящики, которые потом перемешиваются)?

В первом случае задача совпадает с решенной в предыдущем пункте и ответ имеет вид

$$\frac{n!}{(p_1!)^{m_1}\ldots(p_k!)^{m_k}}. \tag{4}$$

А во втором случае надо иметь в виду возможность перестановки групп, содержащих поровну элементов. Теперь уже ответ иной:

$$\frac{n!}{(p_1!)^{m_1}\ldots(p_k!)^{m_k}m_1!\ldots m_k!}. \tag{5}$$

Разные статистики

Задачи о раскладке предметов по ящикам весьма важны для статистической физики. Эта наука изучает, как распределяются по своим свойствам физические частицы, например, какая часть молекул данного газа имеет при данной температуре ту или иную скорость. При этом множество всех возможных состояний распределяют на большое число m маленьких ячеек (фазовых состояний), так что каждая из n частиц попадает в одну из этих ячеек.

Вопрос о том, какой статистике подчиняются те или иные частицы, зависит от их вида. В классической статистической физике, созданной Максвеллом и Больцманом, частицы считаются различимыми друг от друга. Такой статистике подчиняются, например, молекулы газа. Мы уже знаем, что n различных частиц можно распределить по m ячейкам m^n способами. Если все эти m^n способов распределения имеют равную вероятность, то говорят, что частицы подчинены *статистике Максвелла — Больцмана.*

Изучение квантовых явлений показало, что к участвующим в них частицам (фотонам, электронам и т. д.) не применима статистика Максвелла — Больцмана. При этом все частицы распадаются на два класса. К одному из них принадлежат частицы, неразличимые друг от друга. Поэтому для таких частиц имеет значение лишь то, сколько частиц попало в ту или иную ячейку, а не то, какие именно частицы в ней находятся (это похоже на задачу о распределении ненумерованных шаров по лузам). Мы уже знаем, что при этом получается C_{m+n-1}^{m-1} различных способов распределения частиц. Статистику неразличимых частиц, в которой все эти способы считаются равновероятными, разработали Эйнштейн и индийский ученый Бозе. Поэтому ее называют *статистикой Бозе — Эйнштейна.* Ей подчиняются фотоны, атомные ядра и атомы, содержащие четное число элементарных частиц.

Еще необыкновеннее статистика, которой подчиняются такие частицы, как электроны, протоны и нейтроны. Для этих частиц действует так называемый *запрет Паули*, по которому две частицы не могут одновременно попасть в одну и ту же ячейку. Поэтому в соответствующей статистике, разработанной английским физиком Дираком и итальянским ученым Ферми, в каждой ячейке находится не более одной частицы, причем различные распределения, удовлетворяющие указанному условию, считаются равновероятными. Число различных состояний в *статистике Дирака — Ферми* равно числу способов выбрать n ячеек из m, т. е. C_m^n.

Флаги на мачтах

До сих пор мы не учитывали порядок, в котором могут быть расположены элементы каждой части. Но, например, если речь идет о развешивании сигнальных флагов на мачтах, то имеет значение и порядок вывешиваемых флагов. Решим следующую задачу

Имеется n различных сигнальных флагов и m мачт, на которые их вывешивают. Значение сигнала зависит от того, в каком порядке развешены флаги. Сколькими способами можно развесить флаги, если все они должны быть использованы, но некоторые из мачт могут остаться пустыми?

Каждый способ развешивания флагов можно осуществить в два этапа. На первом этапе мы не учитываем ни форму, ни окраску флага, а считаем все флаги одинаковыми. Тогда, как мы уже знаем, их можно развесить на m мачтах C_{n+m-1}^{m-1} способами. А потом вспомним, что на самом деле флаги различны, и, не меняя их числа на каждой мачте, будем переставлять друг с другом всевозможными способами. Число таких перестановок равно $n!$ Значит, из каждого способа развешивания одинаковых флагов получается $n!$ способов развешивания различных флагов. Общее же число способов развешивания флагов равно

$$n!\,C_{n+m-1}^{m-1} = \frac{(n+m-1)!}{(m-n)!} = A_{n+m-1}^{n}. \tag{6}$$

Вообще *число способов распределения n различных предметов по m различным ящикам с учетом их порядка в ящиках равно A_{n+m-1}^{n}.*

Если не все флаги различны, а среди них есть n_1 флагов одного вида, n_2 флагов другого вида, ..., n_k флагов k-го вида, то примененный выше метод решения дает следующее выражение для числа различных сигналов:

$$P(n_1, \ldots, n_k)\,C_{n+m-1}^{m-1}, \tag{7}$$

где $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

Аналогично решаются задачи в случае, когда на каждой мачте должен висеть хотя бы один флаг. С помощью формулы, выведенной на стр. 119, мы получаем, что если при этом все флаги различны, то число сигналов равно $n!\,C_{n-1}^{m-1}$, а в случае, когда состав флагов выражается кортежем $(n_1, \ldots, n_k)$, число сигналов равно

$$P(n_1, \ldots, n_k)\,C_{n-1}^{m-1}. \tag{8}$$

Полное число сигналов

Допустим теперь существование сигналов, для передачи которых используется лишь часть флагов, причем допускаются и пустые мачты. Найдем *полное число сигналов, которые можно передать с помощью n различных сигнальных флагов, вывешиваемых на m мачтах* (порядок флагов учитывается).

Разобьем все сигналы на классы по числу флагов, использованных при передаче сигнала. По формуле (6) с помощью заданных k флагов можно передать A_{k+m-1}^{k} сигналов. Но k флагов можно выбрать из имеющихся n флагов C_n^k способами. Поэтому число различных сигналов, в которых используется ровно k флагов, равно $C_n^k A_{k+m-1}^k$. Значит, полное число сигналов выражается формулой

$$C_n^0 A_{m-1}^0 + C_n^1 A_m^1 + \ldots + C_n^n A_{n+m-1}^n. \tag{9}$$

Распределение нагрузки

Перед началом учебного года происходило распределение 7 курсов между 5 членами кафедры, каждый из которых мог читать любой из этих курсов. Сколькими способами можно распределить нагрузку, если каждый преподаватель обязан прочесть хотя бы один курс?

Новым в этой задаче является условие, что каждый должен прочесть хотя бы один курс — иначе сразу получилось бы, что нагрузку можно разделить 5^7 способами. А теперь поступим так: сначала зафиксируем, сколько курсов берет каждый преподаватель, а потом уже делим курсы в соответствии с выбранным числом курсов у каждого. Число 7 можно разбить на 5 натуральных слагаемых двумя существенно различными способами

$$7 = 3 + 1 + 1 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 + 1 + 1.$$

Остальные способы получаются из этих двух перестановками слагаемых. Но распределить 7 курсов так, чтобы первый преподаватель прочел 3 курса, а остальные — по одному, можно, как мы уже знаем (см. стр. 120) $P(3, 1, 1, 1, 1)$ способами. Выбор же преподавателя, читающего 3 курса, производится $P(1, 4)$ способами (мы переставляем числа 3, 1, 1, 1, 1 и получаем все возможности). Значит, число распределений первого типа равно $P(1, 4)\cdot P(3, 1, 1, 1, 1)$. Точно так же находим, что число распределений второго типа равно $P(2, 3)\cdot P(2, 2, 1, 1, 1)$. А общее число способов равно

$$P(1, 4)\cdot P(3, 1, 1, 1, 1) + P(2, 3)\cdot P(2, 2, 1, 1, 1) = 16\,800.$$

Точно так же рассматривается общий случай, когда число курсов равно n, а число преподавателей — m. В этом случае ответ дается формулой

$$\Sigma P(t_1, \ldots, t_k)\, P(n_1, \ldots, n_m). \tag{10}$$

Сумма распространена на все способы представления числа n в виде суммы m невозрастающих натуральных чисел

$$n = n_1 + \ldots + n_m, \quad n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_m > 0,$$

а $(t_1, \ldots, t_k)$ — состав кортежа $(n_1, \ldots, n_m)$.

Найдем например, число способов распределить 9 различных предметов между 5 лицами так, чтобы каждый получил хотя бы один предмет. Разбиения числа 9 на 5 натуральных слагаемых таковы:

$$9 = 5+1+1+1+1,\ 9 = 4+2+1+1+1,\ 9 = 3+3+1+1+1,\ 9 = 3+2+2+1+1,\ 9 = 2+2+2+2+1.$$

Кортеж (5, 1, 1, 1, 1) имеет состав (1, 4), кортеж (4, 2, 1, 1, 1) — состав (1, 1, 3), кортеж (3, 3, 1, 1, 1) — состав (2, 3), кортеж (3, 2, 2, 1, 1) — состав (1, 2, 2) и кортеж (2, 2, 2, 2, 1) — состав (4, 1). По формуле (10) получаем: число способов разбиения с требуемыми свойствами равно

$$P(1, 4)\, P(5, 1, 1, 1, 1) + P(1, 1, 3)\, P(4, 2, 1, 1, 1) + P(2, 3)\, P(3, 3, 1, 1, 1) + P(1, 2, 2)\, P(3, 2, 2, 1, 1) + P(4, 1)\, P(2, 2, 2, 2, 1) = 834\,120.$$

Задачу о распределении нагрузки можно было решить иначе, применив формулу включений и исключений. Перенумеруем преподавателей и обозначим через A_k множество способов распределения нагрузки, при которых k-й преподаватель оказывается свободным. В этом случае нагрузку придется делить между оставшимися 4 членами кафедры, а число таких способов распределения равно 4^7 (мы допускаем при этом, что и некоторые другие члены кафедры оказались свободными от нагрузки). Если i и j — два различных номера, то множество $A_i \cap A_j$ состоит из 3^7 способов распределения нагрузки, при которых свободны преподаватели i и j, а остальные три делят между собой все курсы. Точно так же находим, что при любых различных i, j, k, l множество $A_i \cap A_j \cap A_k$ состоит из 2^7 элементов, а множество $A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l$ — из 1^7 элементов (если 4 преподавателя не имеют нагрузки, то остается единственный вариант — поручить чтение всех 7 курсов пятому члену кафедры). По частному случаю формулы включения и исключения (стр. 103) получаем $N' = 5^7 - C_5^1 \cdot 4^7 + C_5^2 \cdot 3^7 - C_5^3 \cdot 2^7 + C_5^4 \cdot 1^7 - C_5^5 \cdot 0^7 = 5^7 - 5 \cdot 4^7 + 10 \cdot 3^7 - 10 \cdot 2^7 + 5 = 16\,800$, где через N' обозначено $n(A_1' \cap A_2' \cap A_3' \cap A_4' \cap A_5')$.

Но множество A_k состоит из способов распределения нагрузки, при которых преподаватель с номером k свободен от нагрузки. Поэтому A_k' — множество тех способов распределения, при которых этот преподаватель загружен. А $A_1' \cap A_2' \cap A_3' \cap A_4' \cap A_5'$ — множество способов распределения нагрузки, при которых загружены все преподаватели. Мы доказали, что это множество состоит из

$$5^7 - C_5^1 \cdot 4^7 + C_5^2 \cdot 3^7 - C_5^3 \cdot 2^7 + C_5^4 \cdot 1^7 = 16\,800$$

элементов.

Точно так же решается общая задача: *сколькими способами можно положить n различных предметов в m различных ящиков так, чтобы в каждом ящике лежал хотя бы один предмет?* Ответ дается формулой

$$m^n - C_m^1 (m-1)^n + C_m^2 (m-2)^n + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^r C_m^r (m-r)^n + \ldots + (-1)^{m-1} C_m^{m-1}. \qquad (11)$$

Условие, что ящики различны, здесь существенно. Если предметы кладут в ящики одинакового вида, которые после этого перемешиваются так, что нельзя опознать эти ящики, то ответ будет иной. Из каждого способа распределения предметов по m различным ящикам можно получить $m!$ способов, меняя содержимое ящиков местами (скажем, перекладывая содержимое первого ящика во второй, второго — в третий, а третьего — в первый). При перемешивании ящиков все эти $m!$ способов дают один и тот же результат. Поэтому *число S_n^m способов разложить n различных предметов в m неразличимых ящиков так, чтобы все ящики были непустыми,* *имеет вид*

$$S_n^m = \frac{1}{m!}[m^n - C_m^1(m-1)^n + \ldots +$$

$$+ (-1)^r C_m^r (m-r)^n + \ldots + (-1)^{m-1} C_m^{m-1}]. \qquad (12)$$

Из этой формулы вытекает далеко не очевидный факт, что выражение в квадратных скобках делится без остатка на $m!$ Числа S_n^m называют *числами Стирлинга второго рода.*

Комбинаторика классификаций

В основе любого научного исследования лежит та или иная классификация объектов, явлений, свойств. Биолог классифицирует живые существа по видам, виды — по родам, роды — по отрядам, отряды — по классам, классы — по типам, химик классифицирует элементы по их положению в таблице Менделеева, физик классифицирует различные материалы по их теплопроводности и т. д. С точки зрения математики любая классификация сводится к тому, что некоторое множество элементов разбивают на непересекающиеся друг с другом подмножества.

Часто производят классификацию по тому или иному свойству — цвету, плотности, форме, размерам. В этом случае в один и тот же класс относят объекты, обладающие одинаковым значением этого свойства — объекты одного и того же цвета, одной формы, одинаковых размеров. Такие объекты называют эквивалентными по цвету, форме, размерам. Часто под эквивалентностью понимают полную взаимозаменяемость двух объектов, одинаковых, как две горошины из одного стручка,— для велосипедиста эквивалентны все шарикоподшипники одного и того же размера, для покупателя — все костюмы одного и того же размера, цвета и артикула и т. д.

Но не всегда понятия эквивалентности и одинаковости совпадают. Если надо отправить письмо, то годится любая марка, имеющая данную стоимость, независимо от того, что на ней изображено. Но для филателиста две такие марки могут иметь совершенно несоизмеримую стоимость. Выясним, какими же свойствами должно обладать отношение эквивалентности для того, чтобы оно обеспечивало правильную классификацию, т. е. распадение множества классифицируемых объектов на непересекающиеся подмножества.

Первое из этих свойств настолько очевидно, что формулировка его может показаться излишней.

1. *Каждый элемент сам себе эквивалентен.*

Второе свойство тоже ясно.

2. *Если элемент a эквивалентен элементу b, то и элемент b эквивалентен элементу a.*

Наконец, третье свойство эквивалентности формулируется так.

3. *Если элемент a эквивалентен элементу b, а элемент b — элементу c, то a эквивалентен c.*

Свойства а), б), в) носят особые названия. Их называют соответственно *рефлексивностью*, *симметричностью* и *транзитивностью* отношения эквивалентности.

Легко проверить, что такие отношения, как «иметь одинаковый цвет», «иметь одинаковую форму» и т. д., обладают этими тремя свойствами, т. е. являются отношениями эквивалентности. С каждым отношением эквивалентности для элементов какого-то множества связано, как мы уже говорили, разбиение этого множества на непересекающиеся подмножества, называемые *классами эквивалентности*.

Одно и то же множество может быть разбито на классы эквивалентности по разным признакам. Например, множество деталей в ящике можно разложить на множество гаек, винтов, шайб и т. д., а можно разложить по сортам стали, из которых изготовлены эти детали, по способу их обработки и т. д. Возникает следующая задача: *сколькими различными способами можно разбить множество A из n элементов на классы эквивалентности*? При этом мы учитываем и самое грубое разбиение, состоящее из одного класса — всего множества A, и самое тонкое разбиение, при котором A разбивается на отдельные элементы.

Число таких способов разбиения обозначают B_n и называют *n-м числом Белла*. Так как число разбиений n-множества A на m непустых классов эквивалентности равно S_n^m, то ясно, что

$$B_n = \sum_{m=1}^{n} S_n^m.$$

Жетоны в мешке

Мы уже рассказывали в главе I, что самостоятельное развитие комбинаторики началось с переписки между Паскалем и Ферма о некоторых задачах, связанных с игрой в кости. Одной из этих задач был подсчет числа способов получить N очков, бросая n костей. Рассмотрим теперь и мы эту задачу, причем предположим, что вместо метания костей вытаскивают жетоны из мешка, в котором лежит m жетонов с метками $0, 1, \ldots, m-1$. После каждого вытаскивания жетон кладут обратно в мешок, предварительно записав вытащенное число. Таким образом получают кортеж длины n из чисел $0, 1, \ldots, m-1$, и требуется узнать, сколько из получающихся таким образом кортежей имеют сумму координат N. Это число кортежей обозначим $C_m(n, N)$.

Последняя координата любого кортежа рассматриваемого вида может быть любым из m чисел $0, 1, \ldots, m-1$. Если этой координатой является 0, то сумму N дают первые $n-1$ координат. А количество кортежей длины $n-1$ с суммой N равно $C_m(n-1, N)$ (число m различных жетонов мы считаем фиксированным). Точно так же, если последняя координата равна 1, то сумма первых $n-1$ координат должна равняться $N-1$, а таких кортежей имеется $C_m(n-1, N-1)$. Вообще число кортежей длины n с суммой N, последняя координата которых равна k, есть $C_m(n-1, N-k)$. Поэтому по правилу суммы общее число кортежей длины n с суммой N равно[1]

$$C_m(n-1, N) + C_m(n-1, N-1) + \ldots + C_m(n-1, N-m+1).$$

Итак, мы доказали, что

$$C_m(n, N) = C_m(n-1, N) + C_m(n-1, N-1) + \ldots + C_m(n-1, N-m+1). \tag{13}$$

Пользуясь этим равенством, можно свести задачу о метании n костей к задаче о метании $n-1$ костей, затем вернуться к задаче о метании $n-2$ костей и продолжать этот процесс до тех пор, пока не останется ни одной кости. А для $n=0$ все очевидно, — выбрасывая 0 костей, мы можем единственным образом получить 0 очков и не можем

[1] Мы полагаем $C_m(N, k) = 0$, если $k < 0$.

получить никакого иного количества очков. Значит, $C_m(0, 0) = 1$ и $C_m(0, N) = 0$, если $N < 0$.

Такой способ решения задач, при котором не дается окончательной формулы для ответа, а указывается лишь процесс, позволяющий сводить задачу ко все меньшим и меньшим числовым данным, встречается в комбинаторике очень часто. Равенства вида (13), позволяющие осуществлять понятное движение, называют *рекуррентными формулами*.

Обобщенный арифметический треугольник

При $m = 2$ в мешке лишь два жетона, на которых написаны числа 0 и 1. Поэтому получаются кортежи длины n из нулей и единиц, а сумма координат кортежа равна числу единиц в нем. Но количество кортежей из N единиц и $n - N$ нулей равно $P(N, n - N)$, т. е. C_n^N. Иными словами, $C_2(n, N) = C_n^N$. Формула (13) при $m = 2$ превращается в уже знакомое нам соотношение

$$C_n^N = C_{n-1}^N + C_{n-1}^{N-1}.$$

В главе III с помощью этого соотношения был построен арифметический треугольник. Точно так же соотношение (13) позволяет построить *обобщенный арифметический треугольник* (или *m-арифметический треугольник*). Его элементы при четном $m = 2k$ располагаются так, что числа предшествующей строки находятся над промежутками между числами следующей строки. При этом каждое число равно сумме k чисел предыдущей строки, находящихся слева от него, и k чисел, находящихся справа. Если же $m = 2k + 1$ — нечетное число, то числа пишутся друг над другом и каждое число равно сумме находящегося над ним числа, k чисел, расположенных в предыдущей строке слева от него, и k чисел, расположенных в той же строке справа от него. В обоих случаях сумма располагается симметрично относительно слагаемых. Если слева или справа от искомого числа в предыдущей строке меньше чисел, чем нужно для образования суммы, то недостающие слагаемые полагаются равными нулю.

Выпишем обобщенные арифметические треугольники для $m = 3$ и для $m = 6$.

$m=3$:

Таблица 1

$$\begin{array}{c}
1\\
1\quad 1\quad 1\\
1\quad 2\quad 3\quad 2\quad 1\\
1\quad 3\quad 6\quad 7\quad 6\quad 3\quad 1\\
1\quad 4\quad 10\quad 16\quad 19\quad 16\quad 10\quad 4\quad 1\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

$m=6$:

Таблица 2

$$\begin{array}{c}
1\\
1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\\
1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5\quad 6\quad 5\quad 4\quad 3\quad 2\quad 1\\
1\ 3\ 6\quad 10\quad 15\quad 21\quad 25\quad 27\quad 27\quad 25\quad 21\quad 15\quad 10\quad 6\ 3\ 1\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

В каждой из строк этих таблиц первое число равно 1. Оно показывает, что есть лишь один кортеж с суммой 0 — кортеж, состоящий из n нулей. Следующее за 1 число равно n, т. е. длине кортежей — сумму 1 можно получить n способами, поставив 1 на любое из n мест, а остальные места заполнив нулями. Вообще $(N+1)$-е число в $(n+1)$-й строке равно $C_m(n, N)$ — числу кортежей длины n с суммой координат N.

На обычных игральных костях очки идут от 1 до 6, а не от 0 до 5. Поэтому, чтобы узнать, сколькими способами можно получить N очков, выбросив 6 костей, надо сначала вычесть по 1 от чисел на каждой грани. В результате сумма очков уменьшится на n. Иными словами, число способов получить N очков при бросании n костей равно $C_6(n, N-n)$. Например, если число костей равно 3, а сумма очков — 8, то число способов равно $C_6(3, 5)$. Это 6-е число в 4-й строке табл. 2, т. е. 21.

Проблема абитуриента

Поступающий в высшее учебное заведение должен сдать 4 экзамена. Сколькими способами он может успешно сдать экзамены, если проходной балл равен 17?

Эта задача похожа на задачу о бросании 4 костей. Только теперь каждая «кость» (т. е. каждый экзамен) дает 3, 4 или 5 баллов. Чтобы иметь возможность воспользоваться табл. 1, заменим эти результаты на 0, 1 и 2 балла.

Тогда результат каждого из 4 экзаменов уменьшится на 3, а общая сумма баллов — на 12. Поэтому надо решить такую задачу: *сколькими способами можно получить не менее 5 очков, бросая 4 кости, на которых нанесены цифры 0, 1 и 2?* Так как число костей равно 4, то берем 5-ю строку табл. 1. В этой строке нас интересуют 6-е, 7-е, 8-е и 9-е числа. Складывая их, получаем $16 + 10 + 4 + 1 = 31$. Значит успешно сдать экзамены можно 31 способом. Эти способы таковы: (5, 5, 5, 5), (5, 5, 5, 4), (5, 5, 4, 4), (5, 5, 5, 3), (5, 5, 4, 3), (5, 4, 4, 4), а также все способы, получаемые из написанных перестановками чисел.

Отправка бандероли

За пересылку бандероли надо уплатить 18 коп. Сколькими способами можно оплатить пересылку марками достоинством в 4, 6 и 10 коп., если два способа, отличающиеся порядком марок, считаются различными (марки наклеиваются в один ряд).

Обозначим через $F(N)$ число способов, которыми можно наклеить марки достоинством в 4, 6 и 10 коп. так, чтобы общая стоимость этих марок равнялась N. Для малых значений N нам известны значения $F(N)$, например, $F(0) = 1$ (надо не наклеивать ни одной марки), $F(1) = F(2) = F(3) = 0$ (как ни наклеивать марки указанного выше достоинства, суммы в 1, 2, 3 не получится). Далее, $F(4) = 1$ (наклеивается одна марка достоинством в 4 коп.)

$$F(5) = F(7) = F(9) = 0, \quad F(6) = F(8) = 1.$$

Непосредственный подсчет показывает также, что $F(10) = 3$ (можно наклеить одну марку в 10 коп., а можно наклеить либо марки в 4 и 6 коп., либо в 6 и 4 коп.). Но здесь непосредственный подсчет и не нужен (тем более что для $N = 18$ он уже становится затруднительным). Достаточно заметить, что для любого N верно рекуррентное соотношение

$$F(N) = F(N-4) + F(N-6) + F(N-10). \qquad (14)$$

В самом деле, пусть имеется некоторый способ наклейки марок общей стоимости N коп., причем последней наклеена марка стоимостью в 4 коп. Тогда все остальные марки стоят $N - 4$ коп. Наоборот, присоединяя к любой комбинации марок общей стоимостью $N-4$ коп. одну четырехкопеечную марку, получаем комбинацию марок, имеющую стоимость N коп. При этом из разных комбинаций стоимостью в $N-4$ коп. получатся разные комбинации стоимостью в N коп. Итак, число комбинаций, в которых последней наклеена марка в 4 коп., равно $F(N-4)$.

Точно так же убеждаемся, что число комбинаций, оканчивающихся шестикопеечной маркой, равно $F(N-6)$, а десятикопеечной маркой оканчиваются $F(N-10)$ комбинаций. Поскольку в нашем распоряжении лишь марки достоинством в 4, 6 и 10 коп., этим исчерпываются все возможности, и по правилу суммы получаем соотношение (14).

А теперь уже легко найти, сколькими способами можно получить сумму в 18 коп., т. е. вычислить $F(18)$. По формуле (14)

$$F(18)=F(14)+F(12)+F(8).$$

Значение $F(8)$ мы уже знаем — оно равно 1. А к $F(14)$ и $F(12)$ мы еще раз применим формулу (14)

$$F(14)=F(10)+F(8)+F(4)=3+1+1=5,$$

а

$$F(12)=F(8)+F(6)+F(2)=1+1+0=2.$$

Значит,

$$F(18)=5+2+1=8.$$

Итак, сумму в 18 коп. можно получить 8 способами. Вот они: 10, 4, 4; 4, 10, 4; 4, 4, 10; 6, 4, 4, 4; 4, 6, 4, 4; 4, 4, 6, 4; 4, 4, 4, 6; 6, 6, 6.

В общем виде решенная сейчас задача формулируется так.

Имеются марки достоинством в $k_1, \ldots, k_m$ коп., причем все числа $k_1, \ldots, k_m$ различны, а запас марок считается неограниченным. Сколькими способами можно оплатить с помощью этих марок сумму в N коп., если два способа, отличающихся порядком слагаемых, считаются различными?

В этом случае вместо соотношения (14) пишем общее соотношение

$$F(N)=F(N-k_1)+\ldots+F(N-k_m). \tag{15}$$

Как и в разобранном частном случае $F(N)=0$ при $N<0$ и $F(0)=1$.

Комбинаторные задачи теории информации

Задачу, похожую на разобранную выше, приходится решать в теории информации. Предположим, что сообщение передается с помощью сигналов нескольких типов (например, точек и тире). *Длительность передачи сигнала первого типа равна* t_1, *второго типа* — $t_2, \ldots$, *m-го типа* — t_m. *Сколько различных сообщений можно передать с помощью этих сигналов за* t *единиц времени?* При этом учитываются лишь «максимальные» сообщения, к которым нельзя присоединить ни одного сигнала, не выйдя за рамки предоставленного лимита времени.

Обозначим число сообщений, которые можно передать за t единиц времени через $F(t)$. Так же, как и в задаче о наклейке марок, получаем, что $F(t)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$F(t) = F(t - t_1) + \ldots + F(t - t_m), \tag{16}$$

причем снова $F(t) = 0$, если $t < 0$ и $F(0) = 1$.

Кролики Фибоначчи

Мы уже упоминали в главе I о задаче Фибоначчи, приведшей к первому в истории математики рекуррентному соотношению, в котором n-й член выражался через два предыдущих. С небольшими изменениями эта задача состояла в следующем.

Каждая пара кроликов приносит ежемесячно пару кроликов (самку и самца), *которые дают приплод через два месяца после рождения. Сколько пар кроликов будет через год, если в начале года была одна пара новорожденных кроликов и ни одна пара за год не погибла* (у самого Леонардо в начале года была пара взрослых кроликов, но нам будет удобнее считать их новорожденными)?

Обозначим через u_n число пар кроликов в начале n-го месяца. Тогда по условию $u_1 = 1$. Это же количество сохранится и через месяц $u_2 = 1$. А к началу 3-го месяца появится приплод, и потому $u_3 = 2$. К началу 4-го месяца первоначальная пара кроликов снова даст приплод, а новорожденные кролики приплода еще не дадут. Поэтому $u_4 = 3$. В начале же 5-го месяца приплод дадут и первоначальная пара, и пара, родившаяся в конце второго месяца, и получится 5 пар кроликов, $u_5 = 5$. Легко видеть теперь, что числа $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ связаны друг с другом соотношением $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ — к началу n-го месяца имеем все пары, бывшие к началу предыдущего месяца, и, кроме того, приплод принесут пары, родившиеся за два месяца до данного. Легко подсчитать, что $u_{13} = 233$. Значит, через год будет 233 пары кроликов.

Числа $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ называют числами Фибоначчи (обычно полагают еще, что $u_0 = 0$). Эти числа встречаются в различных вопросах математики, например при самом экономном отыскании точек экстремума методом проб. Молодой ленинградский математик Юрий Матиясевич с помощью этих чисел решил задачу, поставленную в 1900 г. немецким ученым Д. Гильбертом в числе труднейших математических проблем и более 70 лет не поддававшуюся усилиям многих видных математиков.

Рекуррентное соотношение для чисел Фибоначчи совпадает с рекуррентным соотношением для чисел $F(n)$ в случае, когда имеются марки достоинством в 1 и 2 коп. Чтобы установить связь между кроликами и наклейкой марок, поставим в соответствие каждой паре кроликов кортеж из нулей и единиц, отражающий генеалогию этой пары: единицами обозначим месяцы, в начале которых родилась данная пара или кто-либо из ее предков, а нулями — остальные месяцы. При этом, поскольку в начале второго месяца никто не рождался, первыми двумя цифрами у всех пар будут 10 (генеалогия исходной пары задается последовательностью вида 1000 ... 0). Кроме того, так как новорожденная пара начинает давать потомство лишь начиная со второго месяца со дня рождения, ни в какой генеалогии не встретится двух единиц подряд.

Таким образом u_n равно числу кортежей длины n из нулей и единиц, начинающихся цифрами 10 и не содержащих двух единиц подряд. Заменим каждый такой кортеж новым кортежем из единиц и двоек по следующему правилу: отбрасываем первую единицу и заменяем каждую пару цифр 01 на 2, а оставшиеся нули на 1 (так как в кортежах нет двух подряд идущих единиц, то перед каждой единицей стоит хотя бы один нуль). В результате получим кортеж из единиц и двоек, сумма координат которого на 1 меньше длины исходного кортежа. А это и показывает, что u_n равно числу кортежей из единиц и двоек с суммой координат $n - 1$, т. е. $F(n - 1)$. Итак, $u_n = F(n - 1)$.

Разбиение чисел

В задаче о наклейке марок мы должны были выбирать марки лишь трех видов — достоинством в 4, 6 или 10 коп. Предположим теперь, что *имеется неограниченное количество марок любого достоинства: в* 1, 2, 3 *коп. и т. д. Сколькими способами можно в этом случае наклеить марки на сумму в N коп.?*

Эту задачу можно сформулировать и так: *сколькими способами можно представить число N в виде суммы натуральных слагаемых, если нет никаких ограничений ни на сами слагаемые, ни на их число, а два разбиения, отличающихся порядком слагаемых, считаются различными?*

Множество всех таких разбиений числа N можно разбить на классы, отнеся в k-й класс разбиения с k слагаемыми. Каждому такому разбиению отвечает раскладка N одинаковых шаров в k ящиков, при которой ни один из ящиков не пуст. А число таких раскладок, как мы знаем (см. стр. 119) равно C_{N-1}^{k-1}.

Чтобы найти общее число разбиений, надо просуммировать полученные ответы по k от 1 до N: $C_{N-1}^{0} + C_{N-1}^{1} + \ldots + C_{N-1}^{N-1}$. Но эта сумма равна 2^{N-1}. Значит, *существует 2^{N-1} способов разложить число N на натуральные слагаемые*. Например, число 5 можно разбить на слагаемые $2^{5-1} = 16$ способами:

$5=5$,	$5=3+1+1$,	$5=2+1+1+1$,
$5=4+1$,	$5=2+2+1$,	$5=1+2+1+1$,
$5=3+2$,	$5=2+1+2$,	$5=1+1+2+1$,
$5=2+3$,	$5=1+3+1$,	$5=1+1+1+2$,
$5=1+4$,	$5=1+2+2$,	$5=1+1+1+1+1$.
	$5=1+1+3$,	

Если допустить нулевые слагаемые, но ограничить число слагаемых значением k, то получим задачу о раскладке N шаров по k ящикам, которая решается C_{N+k-1}^{k-1} способами.

Уплата денег

В кошельке лежат монеты в 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20 и 50 коп. по одной монете каждого достоинства. Сколькими способами можно уплатить этими монетами за покупку стоимостью в 73 коп.?

В отличие от рассмотренных выше задач здесь порядок монет не играет роли — важно лишь, какие монеты берутся для уплаты. Обозначим через $F(k_1, \ldots, k_m; N)$ число способов, которыми можно уплатить N коп. с помощью монет различного достоинства $k_1, \ldots, k_m$ коп., беря не более чем по одной монете каждого достоинства.

Чтобы вывести рекуррентное соотношение для $F(k_1, \ldots, k_m; N)$, разобьем все способы уплаты на два класса в зависимости от того, была или нет использована монета достоинством в k_m коп. Если эту монету использовали, то остается уплатить $N - k_m$ коп. с помощью монет, имеющих достоинство $k_1, \ldots, k_{m-1}$ коп., а если ее не использовали, то теми же монетами в $k_1, \ldots, k_{m-1}$ коп. надо оплатить всю сумму в N коп. Первую возможность можно реализовать $F(k_1, \ldots, k_{m-1}; N - k_m)$ способами, а вторую — $F(k_1, \ldots, k_{m-1}; N)$ способами.

Отсюда следует, что верно рекуррентное соотношение

$$F(k_1, \ldots, k_m; N) = F(k_1, \ldots, k_{m-1}; N - k_m) + F(k_1, \ldots, k_{m-1}; N). \quad (17)$$

Оно позволяет свести задачу о выборе из m монет к задаче о выборе из $m-1$ монет. Затем мы сводим все к задаче о выборе из $m-2$ монет и т. д., пока не дойдем до задачи об уплате нулевой суммы либо до задачи о выборе из одной монеты. Эти задачи решаются однозначно. При этом в ходе вычисления многие слагаемые отбрасываются. Например, если $N > k_1 + \ldots + k_m$, то $F(k_1, \ldots, k_m; N) = 0$, так как наличного запаса монет не хватает для оплаты покупки. Кроме того, в записи $F(k_1, \ldots, k_m; N)$ всегда можно вычеркнуть те k_j, которые больше N — они не могут участвовать в оплате суммы N коп. (например, $F(1, 2, 8, 10; 7) = F(1, 2; 7)$).

Из соотношения (17) вытекает, что

$F(1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, 50; 73) = F(1, 2, 3, 5, 10, 15, 20; 73) + F(1, 2, 3, 5, 10, 15, 20; 23) = F(1, 2, 3, 5, 10, 15, 20; 23)$,

так как $1+2+3+5+10+15+20 < 73$ и потому $F(1, 2, 3, 5, 10, 15, 20; 73) = 0$. Продолжая применять рекуррентную формулу, получаем в конце концов, что $F(1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, 50; 73) = 4$. Итак, требуемую уплату можно произвести 4 способами, а именно 50, 20 и 3 коп., 50, 20, 2 и 1 коп., 50, 15, 5 и 3 коп. и, наконец, 50, 15, 5, 2 и 1 коп.

Как разменять гривенник?

Читателю, наверное, приходится каждый день менять гривенники (монеты в 10 коп.) — для проезда на метро нужны пятачки, для разговора по телефону-автомату — двух- или однокопеечные монеты, а чтобы выпить стакан газированной воды с сиропом, надо опустить в автомат трехкопеечную монету. В связи с этим возникает вопрос:

Сколькими способами можно разменять гривенник на монеты в 1, 2, 3 и 5 коп.?

Обозначим искомое число способов через $\Phi(1,\ 2,\ 3,\ 5;\ 10)$ и разобьем все способы размена на классы по числу использованных пятачков. Если не использован ни один пятачок, то остается та же сумма в 10 коп., что и в начале, которую надо разменять уже монетами в 1, 2 и 3 коп. Если использован один пятачок, то теми же монетами остается разменять сумму в 5 коп., а если два пятачка, то надо разменять сумму в 0 коп. Таким образом, имеет место рекуррентное соотношение

$$\Phi(1,\ 2,\ 3,\ 5;\ 10) = \Phi(1,\ 2,\ 3;\ 10) + \\ + \Phi(1,\ 2,\ 3;\ 5) + \Phi(1,\ 2,\ 3;\ 0).$$

Ясно, что $\Phi(1,\ 2,\ 3;\ 0) = 1$ — уплатить 0 коп. можно единственным образом.

Точно так же, классифицируя способы уплаты по числу использованных трехкопеечных монет, получаем

$$\Phi(1,\ 2,\ 3;\ 5) = \Phi(1,\ 2;\ \ 5) + \Phi(1,\ 2;\ 2),$$

а

$$\Phi(1,\ 2,\ 3;\ 10) = \Phi(1,\ 2;\ 10) + \Phi(1,\ 2;\ 7) + \\ + \Phi(1,\ 2;\ 4) + \Phi(1,\ 2;\ 1).$$

Продолжая эти подсчеты и учитывая, что для любого $n \geqslant 0$ $\Phi(1;\ n) = 1$ (любое число можно единственным образом представить в виде суммы единиц), получим в конце концов, что $\Phi(1,\ 2,\ 3,\ 5;\ 10) = 20$, т. е. существует 20 способов размена.

$5 \cdot 2$,	$5 + 1 \cdot 5$,	$3 + 2 \cdot 3 + 1$,	$2 \cdot 4 + 1 \cdot 2$,
$5 + 3 + 2$,	$3 \cdot 3 + 1$,	$3 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3$,	$2 \cdot 3 + 1 \cdot 4$,
$5 + 3 + 1 \cdot 2$,	$3 \cdot 2 + 2 \cdot 2$,	$3 + 2 + 1 \cdot 5$,	$2 \cdot 2 + 1 \cdot 6$,
$5 + 2 \cdot 2 + 1$,	$3 \cdot 2 + 2 + 1 \cdot 2$,	$3 + 1 \cdot 7$,	$2 + 1 \cdot 8$,
$5 + 2 + 1 \cdot 3$,	$3 \cdot 2 + 1 \cdot 4$,	$2 \cdot 5$,	$1 \cdot 10$.

Если надо уплатить сумму в N коп. монетами достоинством в $k_1, k_2, \ldots, k_m$ коп., то для числа $\Phi(k_1, \ldots, k_m; N)$ способов размена верно рекуррентное соотношение

$$\Phi(k_1, \ldots, k_m; N) = \Phi(k_1, \ldots, k_{m-1}; N) + \\ + \Phi(k_1, \ldots, k_m; N - k_m). \tag{18}$$

Рекуррентное соотношение (18) показывает, что либо мы не используем ни одной монеты в k_m коп., уплачивая всю сумму монетами в $k_1, \ldots, k_{m-1}$ коп., либо хотя бы одна из монет в k_m коп. использована, тогда надо заплатить оставшуюся сумму в $N - k_m$ коп. монетами в $k_1, \ldots, k_m$ коп.

Диаграммная техника

Первоначальные методы доказательства теорем о разбиениях чисел были весьма сложны. Как и во многих вопросах математики, привлечение геометрических соображений упростило доказательства этих теорем. Каждое разбиение числа N на слагаемые можно представить в виде диаграммы, строки которой состоят из стольких точек, сколько единиц входит в соответствующее слагаемое. Например, разбиению $7 = 1 + 1 + 2 + 3$ соответствует диаграмма на рис. 23.

Разбиения, отличающиеся лишь порядком слагаемых, мы будем рассматривать как одинаковые. Для таких разбиений строки в диаграмме можно расположить так, чтобы их длина не убывала сверху вниз. Кроме того, первые точки в каждой строке мы будем изображать в одном и том же столбце. Такие диаграммы назовем *нормальными*.

С помощью диаграмм можно доказывать разные теоремы о разбиениях. Докажем, например, что *любое число N можно разбить на не более, чем m слагаемых столькими же способами, что и число $N + m$ на m слагаемых.*

В самом деле, диаграмма, изображающая разбиение числа N на не более чем m слагаемых, состоит из N точек, расположенных не более чем в m строках. Добавим к каждой из таких диаграмм столбец, состоящий из m точек (рис. 24, где $N = 5$, $m = 4$). Получится диаграмма, состоящая из $N + m$ точек, расположенных в m строках, причем в каждой строке окажется хотя бы одна точка.

Обратно, если задана диаграмма, состоящая из $N + m$ точек, расположенных в m строках, то, отбрасывая ее первый столбец, получим диаграмму из N точек, расположенных не более чем в m строках.

Мы установили взаимно однозначное соответствие между диаграммами двух видов. Поэтому число диаграмм обоих видов одинаково.

Несколько сложнее доказывается следующая теорема Эйлера.

Рис. 23.

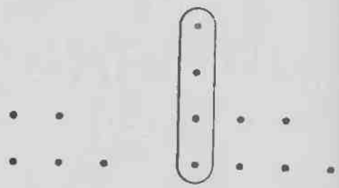


Рис. 24.

Разбиений числа N на не более, чем m слагаемых столько же, сколько разбиений числа $N + \frac{m(m+1)}{2}$ на m неравных слагаемых.

Доказательство сводится к тому, что к каждой диаграмме, изображающей разбиение числа N на не более чем m

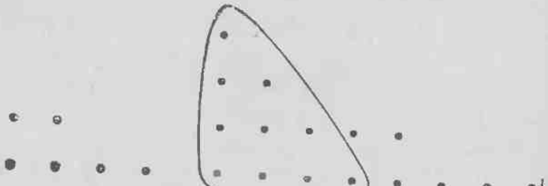


Рис. 25.

слагаемых, добавляется слева прямоугольный равнобедренный треугольник, состоящий из m строк точек, после чего диаграмма нормализуется (рис. 25, где $N = 6$, $m = 4$). Так как число точек в треугольнике равно $\frac{m(m+1)}{2}$, то получаем диаграмму из $N + \frac{m(m+1)}{2}$ точек, состоящую из

m строк. При этом все строки диаграммы будут различной длины, поскольку в исходной диаграмме длины строк при движении сверху вниз не убывали, а длины строк треугольника все время увеличиваются. Описанный процесс устанавливает взаимно однозначное соответствие между двумя типами диаграмм. Поэтому число диаграмм обоих видов одинаково, что и доказывает наше утверждение.

Наряду с добавлением столбцов или треугольников часто используют поворот диаграмм на 90° с последующей

Рис. 26.

Рис. 27.

нормализацией (рис. 26). Если сделать такое преобразование еще раз, то снова получим исходную диаграмму. Поэтому все диаграммы распадаются на двойственные друг другу пары диаграмм (впрочем, некоторые диаграммы оказываются при этом двойственными сами себе, например, диаграмма на рис. 27).

Пользуясь двойственностью диаграмм, можно сравнивать разбиения, подчиненные некоторым условиям на величину слагаемых, с разбиениями, подчиненными условиям на число слагаемых. Например, справедливо следующее утверждение.

Разбиений числа N на слагаемые, не превосходящие m, столько же, сколько разбиений N на не более чем m слагаемых.

В самом деле, диаграммы, изображающие разбиение N на слагаемые, не превосходящие m, состоят из строк, ни одна из которых не длиннее, чем m. Значит, в таких диаграммах не более чем m столбцов. А если повернуть такую диаграмму на 90°, то получится диаграмма, содержащая не более чем m строк, т. е. изображающая разбиение того же числа N на не более чем m слагаемых.

Точно так же доказываются такие утверждения.

Разбиений числа N на m слагаемых столько же, сколько разбиений N на слагаемые, не превосходящие m, хотя бы одно из которых равно m.

Разбиений числа N на четные слагаемые столько же, сколько разбиений, в которые каждое из чисел входит с четной кратностью (разумеется, некоторые из чисел могут совсем не входить, так как нуль — четное число).

Разбиений числа N на нечетные слагаемые столько же, сколько разбиений N, в которые каждое из слагаемых, кроме наибольшего, входит с четной кратностью, а наибольшее слагаемое — с нечетной кратностью.

Разбиения фигур

Рекуррентные соотношения применяются и для решения многих задач геометрической комбинаторики. Найдем, например, *наибольшее число частей, на которые делят плоскость n прямых*. Обозначим это число через $U(n)$. Проведем $(n+1)$-ю прямую так, чтобы она пересекала все ранее проведенные прямые. Тогда на ней будет n точек пересечения, которые разбивают ее на $n+1$ части. Каждая из этих частей принадлежит границе одной новой части плоскости. Таким образом, мы получили для $U(n)$ рекуррентное соотношение

$$U(n+1) - U(n) = n+1.$$

Чтобы найти отсюда $U(n)$, просуммируем эти соотношения от $n = 1$ до $n = k-1$ и учтем, что $U(1) = 2$. Получаем

$$U(k) = 2 + (2 + 3 + \ldots + k) = \frac{k^2+k+2}{2}.$$

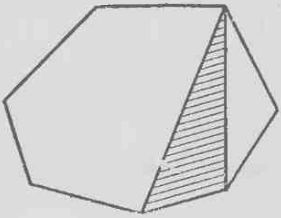
Значит, n прямых могут делить плоскость не более чем на $\frac{n^2+n+2}{2}$ частей.

Более сложное рекуррентное соотношение получается при решении следующей задачи.

Сколькими способами можно разбить выпуклый $(n+2)$-угольник на треугольники диагоналями, непересекающимися внутри этого многоугольника?

Обозначим искомое число способов через $V(n)$. Выберем в многоугольнике $A_1A_2 \ldots A_nA_{n+1}A_{n+2}$ две соседние вершины, например A_{n+1} и A_{n+2}. В каждом разбиении нашего многоугольника на треугольники найдется один и только один треугольник со стороной $A_{n+1}A_{n+2}$. Его третьей вершиной может быть любая из вершин $A_1, \ldots, A_n$. Если этой третьей вершиной является A_s, $2 \leqslant s \leqslant n-1$, то после удаления треугольника $A_sA_{n+1}A_{n+2}$ многоугольник распадается на $(s+1)$-угольник и $(n-s+2)$-угольник (рис. 28). Но $(s+1)$-угольник можно разбить на треугольники $V(s-1)$ способами, а $(n-s+2)$-угольник — $V(n-s)$ способами. Поэтому в силу правила произведения число разбиений, в которые входит треугольник $A_sA_{n+1}A_{n+2}$, равно $V(s-1)V(n-s)$. В случае,

Рис. 28.



когда $s=1$ или $s=n$, получается лишь одна часть и поэтому надо положить $V(0)=1$. Применяя правило суммы, убеждаемся, что справедливо рекуррентное соотношение

$$V(n) = V(0)V(n-1) + V(1)V(n-2) + \ldots + V(n-1)V(0), \qquad (19)$$

где $V(0)=1$. Ниже (см. стр. 182) будет показано, что решением этого соотношения является

$$V(n) = \frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}.$$

К тому же рекуррентному соотношению приводит следующая задача, возникающая в некоторых вопросах квантовой химии.

На окружности заданы 2 n точек. Скольким способами можно попарно соединить эти точки n непересекающимися отрезками?

Алгебра комбинаторики

Метод последовательного вычисления по рекуррентным формулам, хотя и надежен, но уж очень однообразен. Кроме того, пользуясь этим методом, мы получаем много излишней информации — нам нужно, например, найти $C_6(8, 15)$, а для этого приходится находить значения $C_6(n, N)$ при всех $n < 8$. Существует метод, значительно ускоряющий расчеты и позволяющий быстро обнаруживать различные свойства изучаемых чисел. Он основан на использовании многочленов и бесконечных рядов, коэффициентами которых служат эти числа.

Начнем с самой простой задачи — *сколькими способами можно получить k выпадений герба, бросая монету n раз*? Сначала перечислим все случаи, которые могут получиться, если n раз кидать монету. Каждый такой случай задается кортежем длины n из букв «г» (герб) и «р» (решетка). Будем вместо этих букв писать x и a. Все кортежи длины n из букв x и a получатся, если взять $(x + a)^n$, переписать в виде $(x + a)(x + a) \ldots (x + a)$ (n раз) и раскрыть скобки, выписывая в каждом члене буквы в порядке появления, не переставляя букв и не заменяя произведения одинаковых букв степенями. Например, в разложении

$$(x + a)(x + a) = xx + xa + ax + aa$$

участвуют все кортежи длины 2. Мы знаем уже, что число кортежей длины n, в которые входят k букв x и $n - k$ букв a, равно C_n^k. Поэтому, заменяя произведения одинаковых букв степенями и приводя подобные члены, получаем разложение

$$(x + a)^n = C_n^n x^n + C_n^{n-1} x^{n-1} a + \ldots + \\ + C_n^k x^k a^{n-k} + \ldots + C_n^0 a^n. \qquad (20)$$

Это равенство называют «биномом Ньютона», хотя, как говорилось в главе I, оно было известно за несколько сот лет до рождения Ньютона. Полагая в нем $a = 1$ и переставляя слагаемые, получаем

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k. \qquad (21)$$

Итак, мы пришли к новому определению чисел C_n^k — они оказались коэффициентами при x^k в разложении $(1 + x)^n$.

Мы определили C_n^m как число m-подмножеств в n-множестве X. Здесь числа m и n должны быть натуральными или, поскольку мы допускаем и пустые множества, в крайнем случае нулями. Ни дробными, ни отрицательными они быть не могут — нельзя говорить, что в некотором множестве —6 предметов или 7/9 предмета.

Но у чисел C_n^m слишком много замечательных свойств. Поэтому хотелось бы выйти за тесные рамки натуральных чисел и определить C_n^m для любых значений n и m так, чтобы все или хотя бы почти все их свойства сохранились и после такого обобщения. Эту задачу удалось решить Эйлеру. Однако его решение основывалось на интегральном исчислении. Быть может, не все читатели знакомы с ним — ведь в предисловии было обещано, что книгу сможет читать и школьник 8-го или 9-го класса. Покажем сейчас, как без всяких интегралов можно определить числа C_n^m для любых значений n (но при целых неотрицательных значениях m). Для этого запишем C_n^m в следующем виде:

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1\cdot 2\dots m}. \qquad (22)$$

Правая часть равенства (22) имеет смысл при любых значениях n. Мы примем выражение, стоящее в правой части (22), за определение C_x^m при любом значении x

$$C_x^m = \frac{x(x-1)\dots(x-m+1)}{1\cdot 2\dots m}. \qquad (23)$$

Соотношения, доказанные нами для чисел C_n^m, остаются в большинстве случаев верными и для чисел C_x^m. Дело в том, что правая часть равенства (23) — это многочлен от x, а в алгебре доказывают, что два многочлена от x, равные при всех натуральных значениях x, равны и при остальных значениях x.

Нас будут в дальнейшем интересовать значения C_n^m при целых отрицательных значениях n. Пусть $n = -k$. Тогда

$$C_{-k}^m = \frac{(-k)(-k-1)\dots(-k-m+1)}{1\cdot 2\dots m} =$$
$$= (-1)^m \frac{k(k+1)\dots(k+m-1)}{m!} = (-1)^m C_{k+m-1}^m. \qquad (24)$$

Итак, принятое для формулы (20) название «бином Ньютона» с точки зрения истории математики неверно. Истинная заслуга Ньютона заключалась в том, что ему удалось обобщить формулу для $(a+x)^n$ на случай нецелых показателей. Ньютон доказал, что если a — положительное число и $|x| < a$, то для любого действительного значения α имеет место равенство

$$(a+x)^\alpha = a^\alpha + C_\alpha^1 a^{\alpha-1}x + \ldots + C_\alpha^k a^{\alpha-k}x^k + \ldots =$$
$$= a^\alpha\left[1 + C_\alpha^1\left(\frac{x}{a}\right) + \ldots + C_\alpha^k\left(\frac{x}{a}\right)^k + \ldots\right]. \qquad (25)$$

Здесь C_α^k — введенные выше числа. Только теперь получилось не конечное множество слагаемых, а бесконечный ряд. В случае, когда $\alpha = n$ — натуральное число, начиная с некоторого места во все выражения для C_α^k входит скобка $(n-n)$, обращающая эти коэффициенты в нуль. Именно поэтому при натуральных значениях α вместо бесконечного ряда получается конечная сумма.

Доказательство формулы (25) в общем виде требует применения дифференциального исчисления. Если $\alpha = -k$ — целое отрицательное число, формула доказывается математической индукцией по k.

Равенство (25) справедливо лишь при $|x| < a$. Если неосторожный читатель попробует положить в обеих частях этого равенства $\alpha = -k$, $x = a = 1$ и выведет на этом основании «замечательную» формулу

$$2^{-k} = 1 - C_k^1 + C_{k+1}^2 - C_{k+2}^3 + \ldots, \qquad (26)$$

то он совершит серьезную ошибку — ведь справа написана сумма целых чисел, которая никак не может равняться 2^{-k}.

В XVIII в., когда теория бесконечных рядов еще не была детально изучена, подобные ошибки делали и известные математики. Понадобились десятилетия напряженных исследований для того, чтобы выяснить, что же такое сумма бесконечного ряда, в каких случаях она существует, когда можно перемножать ряды как конечные суммы, а когда нельзя и т. д. Оказалось, что такой ряд, как в формуле (26), не имеет суммы (или, как говорят математики, расходится). Впрочем, следует сказать, что в конце XIX в. понятие суммы бесконечного ряда было обобщено и были даны, в частности, такие определения, при которых формула (26) приобретала смысл. Но эти вопросы выходят за рамки нашей книги.

Производящие функции

Мы видели, что выражение $(1+x)^n$ оказалось тесно связанным с числами C_n^k — эти числа являются коэффициентами при x^k в разложении $(1+x)^n$ по степеням x. Вообще выражение $f(x)$ называют *производящей функцией* для чисел $a_0, \ldots, a_k, \ldots$, если разложение $f(x)$ по степеням x имеет вид

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k + \ldots$$

Найдем, например, производящую функцию для числа способов представить N в виде суммы n слагаемых, каждое из которых равно одному из чисел $k_1, \ldots, k_m$. Чтобы в показателе степени получились такие слагаемые, надо возводить в степень сумму $x^{k_1} + \ldots + x^{k_m}$. А так как число слагаемых равно n, то и возводить надо в n-ю степень. Иными словами, при разложении $(x^{k_1} + \ldots + x^{k_m})^n$ по степеням x коэффициентом при x^N и окажется искомое число способов.

В частности, если допустимыми значениями слагаемых являются числа $0, 1, \ldots, m-1$, то число способов получить сумму N, складывая n слагаемых, равно $C_m(n, N)$. Поэтому

$$(1 + x + \ldots + x^{m-1})^n = \sum_N C_m(n, N)\, x^N.$$

Производящую функцию для чисел $C_m(n, N)$ можно записать по-другому, если воспользоваться формулой для суммы геометрической прогрессии:

$$(1 + x + \ldots + x^{m-1})^n = \frac{(1-x^m)^n}{(1-x)^n} = (1-x^m)^n (1-x)^{-n}.$$

Разлагая $(1-x^m)^n$ и $(1-x)^{-n}$ по формулам бинома Ньютона, получаем

$$C_m(n, N) = \sum_k (-1)^k C_n^k C_{n+N-km-1}^{n-1} \tag{27}$$

(суммирование ведется до тех пор, пока выполняется неравенство $N - km \geqslant 0$).

Производящие функции можно написать для всех задач, решенных выше методом рекуррентных соотношений. Например, для задачи об уплате суммы в N коп. монетами достоинством в $k_1, \ldots, k_m$ коп., причем каждая монета используется лишь один раз, производящая функция имеет вид

$$(1 + x^{k_1}) \ldots (1 + x^{k_m}).$$

Счастливые троллейбусные билеты

Некоторые люди считают шестизначные номера троллейбусных билетов «счастливыми», если сумма первых 3 цифр равна сумме последних 3 цифр (другие, впрочем, предпочитают складывать цифры на четных и нечетных местах). Например, билет 615 372 «счастливый», так как $6+1+5 = 3+7+2 = 12$.

Чтобы найти число счастливых билетов, заменим последние 3 цифры их дополнениями до 9. Например, вместо 615 372 возьмем 615 627. Тогда получится билет, сумма цифр которого равна 27 (например, $6+1+5+6+2+7 = 27$). Так как цифры в билете принимают значения от 0 до 9, число цифр в каждом номере равно 6, а их сумма равна 27, то подсчет счастливых билетов сводится к отысканию значения $C_{10}(6, 27)$. А это значение можно найти по формуле (27)

$$C_{10}(6, 27) = \sum_{k=0}^{2} (-1)^k C_6^k C_{32-10k}^5 =$$

$$= C_{32}^5 - C_6^1 C_{22}^5 + C_6^2 C_{12}^5 = 55\,252.$$

Наборы гирь

В магазинах применяют гири разного веса: 1, 2, 3, 5, 10 кг и т. д. Такой набор гирь сложился исторически и менять его было бы, вероятно, нецелесообразно. Но с точки зрения комбинаторики более удачным был бы иной набор гирь: 1, 2, 4, 8 кг. Он позволил бы отвешивать любое целое число килограммов от 1 до 15 кг. При этом каждый вес получался бы единственным образом

$$
\begin{array}{lll}
1=1, & 6=4+2, & 11=8+2+1, \\
2=2, & 7=4+2+1, & 12=8+4, \\
3=1+2, & 8=8, & 13=8+4+1, \\
4=4, & 9=8+1 & 14=8+4+2, \\
5=4+1, & 10=8+2, & 15=8+4+2+1.
\end{array}
$$

Вообще, имея по одной гире весом в 1, 2, 4, . . ., 2^n кг, можно единственным образом получить любой вес от 1 до $(2^{n+1}-1)$ кг, кладя гири на одну чашку весов. Это утверждение можно было бы доказать, использовав популярную сейчас двоичную систему счисления. Но оно очень просто доказывается с помощью производящих функций. Если в выражении

$$S(x)=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2^n})$$

раскрыть скобки, то коэффициентом при x^N будет число, показывающее, сколькими способами можно представить N в виде суммы чисел 1, 2, 4,. . . , 2^n, беря каждое из них не более одного раза.

Вместо того чтобы раскрывать скобки, умножим $S(x)$ на $1-x$ и вспомним, что $(1-x)(1+x)=1-x^2$, $(1-x^2)(1+x^2)=1-x^4$ и т. д. Поэтому, свернув все произведения, мы получим в конце концов

$$(1-x)S(x)=1-x^{2^{n+1}}$$

и потому $S(x)=\dfrac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$. Но правая часть этой формулы не что иное, как выражение для суммы геометрической прогрессии со знаменателем x и первым членом 1, состоящей из 2^{n+1} членов. Поэтому

$$S(x)=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{2^{n+1}-1}.$$

Полученное равенство и показывает, что любое натуральное число от 1 до $2^{n+1}-1$ можно единственным образом представить в виде суммы чисел 1, 2,..., 2^n, беря их не более одного раза.

С алгебраической точки зрения проведенное доказательство основывалось на том, что многочлен $1+x+$ $+x^2+\ldots+x^k$ при $k=2^{n+1}-1$ допускает разложение на множители $1+x$, $1+x^2$, $1+x^4$,. . ., $1+x^{2^n}$. Если при каком нибудь другом значении k удастся разложить этот многочлен на множители, то тем самым мы найдем другие наборы гирь с аналогичным свойством — любой вес от 1 до k может быть получен единственным образом путем выбора нескольких гирь из этого набора (при этом, если в набор входят гири одного и того же веса, они считаются неразличимыми друг от друга, и наборы, отличающиеся лишь тем, какая именно гиря данного веса взята, отождествляются).

Из всех наборов со свойством единственности двоичный набор 1, 2, 4, . . . , 2^n состоит из наименьшего числа гирь. Но если не требовать, чтобы все гири лежали на одной чашке весов, то количество гирь можно уменьшить. В этом случае достаточен «троичный» набор: 1, 3, 9, 27, ..., 3^n кг. С помощью такого набора можно, используя обе чашки весов, получить любой вес от 1 кг до $\frac{3^{n+1}-1}{2}$ кг. Иными словами, любое целое число от $-\frac{3^{n+1}-1}{2}$ до $\frac{3^{n+1}-1}{2}$ можно представить единственным образом в виде суммы некоторых чисел из набора $\pm 1, \pm 3, \ldots, \pm 3^n$, беря каждое число не более одного раза (знаки + и — соответствуют тому, что гири могут лежать как на другой чашке, чем взвешиваемый товар, так и на той же чашке).

Чтобы доказать это утверждение, достаточно взять выражение, в которое входят не только положительные, но и отрицательные степени x

$$S(x) = (x^{-1} + 1 + x)(x^{-3} + 1 + x^3)\ldots(x^{-3^n} + 1 + x^{3^n})$$

и умножить $S(x)$ на $1 - x$.

Задачи к главе IV

1. Сколькими способами можно разложить в два кармана 9 монет различного достоинства?

2. Сколькими способами можно распределить между тремя людьми $3n$ различных предметов так, чтобы каждый получил n предметов?

3. Даны $2n$ элементов. Рассматриваются всевозможные разбиения этих элементов на пары, причем разбиения, отличающиеся друг от друга только порядком элементов внутри пар и порядком расположения пар, считаются совпадающими. Сколько существует различных разбиений?

4. Решите ту же задачу, если разбиваются np элементов на n групп по p элементов в каждой группе.

5. Сколькими способами можно распределить 30 рабочих на 3 бригады по 10 человек в каждой бригаде? А на 10 групп по 3 человека в каждой группе?

6. Сколькими способами можно разделить колоду из 36 карт пополам так, чтобы в каждой пачке было по 2 туза?

7. Сколькими способами можно разложить 10 книг на 5 бандеролей по 2 книги в каждой (порядок бандеролей не принимается во внимание)?

8. Сколькими способами можно разложить 9 книг на 4 бандероли по 2 книги и 1 бандероль в 1 книгу?

9. Сколькими способами можно разложить 9 книг на 3 бандероли по 3 книги в каждой?

10. Сколькими способами 3 человека могут разделить между собой 6 одинаковых яблок, 1 апельсин, 1 сливу, 1 мандарин, 1 грушу, 1 айву и 1 хурму?

11. Сколькими способами можно выполнить этот раздел так, чтобы каждый получил по 4 плода?

12. Лица A, B и C имеют по 3 яблока каждый и, кроме того, A имеет 1 грушу, 1 сливу и 1 айву, B имеет 1 апельсин, 1 лимон и 1 хурму, C имеет 1 мандарин, 1 персик и 1 абрикос. Сколькими способами они могут распределить между собой эти фрукты так, чтобы каждый получил по 6 плодов?

13. Поезду, в котором находится m пассажиров, предстоит сделать n остановок. Сколькими способами могут распределиться пассажиры между этими остановками? Решите ту же задачу, если учитывается лишь количество пассажиров, вышедших на каждой остановке.

14. Сколькими способами можно разложить $m + p + n$ различных предметов на 3 группы так, чтобы в первой группе было m, во второй p и в третьей n предметов?

15. Сколькими способами 12 пятачков можно разложить по пяти различным пакетам, если ни один пакет не должен быть пустым?

16. Сколькими способами можно расставить 20 книг в книжном шкафу с 5 полками, если каждая полка может вместить все 20 книг?

17. Сколькими способами можно надеть 5 различных колец на пальцы одной руки, исключая большой палец?

18. 30 человек голосуют по 5 предложениям. Сколькими способами могут распределиться голоса, если каждый голосует только за одно предложение и учитывается лишь количество голосов, поданных за каждое предложение?

19. В кошельке лежит по 20 монет достоинством в 10, 15 и 20 коп. Сколькими способами можно из этих 60 монет выбрать 20?

20. Стороны каждой из двух игральных костей помечены числами 0, 1, 3, 7, 15, 31. Сколько различных сумм может получиться при метании этих костей?

21. Стороны каждой из трех игральных костей помечены числами 1, 4, 13, 40, 121, 364. Сколько различных сумм получится при метании этих костей?

22. Кидают 6 игральных костей, имеющих различные цвета и помеченных числами 1, 2, 3, 4, 5, 6. Во скольких случаях они дадут один вид очков? Два вида? Три вида? Четыре вида? Пять видов? Шесть видов?

23. Бросают n игральных костей. Сколько может получиться различных результатов, если результаты, отличающиеся друг от друга лишь порядком очков, считаются одинаковыми, а на каждой кости нанесены 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков?

24. Сколькими способами можно представить число 1 000 000 в виде произведения трех множителей, если произведения, отличающиеся порядком множителей, считаются различными? Решите ту же задачу, если порядок множителей не учитывается.

25. Сколькими способами можно представить число 1958 в виде суммы последовательных натуральных чисел?

26. Сколькими способами можно разбить натуральное число на сумму k неотрицательных целых слагаемых (слагаемые, отличающиеся порядком слагаемых, считаются различными).

27. Сколькими способами можно разрезать ожерелье, состоящее из k попарно различных бусин, на k частей (резать можно только между бусинами)?

28. Сколькими способами можно распределить 28 костей домино между 4 игроками? Сколько среди этих способов таких, что игрок A получает 7 «дублей» (т. е. костей (0; 0), (1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4), (5; 5) и (6; 6)? Сколько способов распределения, при которых хоть один из игроков получает 7 «дублей»? Во скольких случаях игрок A получит 6 «дублей»?

29. Сколькими способами можно раздать колоду в 52 карты 13 игрокам по 4 карты каждому игроку? Решите ту же задачу при условии, что каждый должен получить по одной карте каждой масти. Решите ту же задачу при условии, что один игрок имеет карты всех четырех мастей, а остальные — карты одной масти.

30. Сколькими способами можно раздать 52 карты 4 игрокам так, чтобы каждый получил по 3 карты трех мастей и 4 карты четвертой масти?

31. Сколькими способами можно раздать 19 различных предметов 5 участникам так, чтобы четверо из них получили по 4 предмета, а пятый — 2 предмета. Решите ту же задачу, если трое получают по 4 предмета, а двое — по 3 предмета.

32. Имеется n пар различных предметов. Найдите полное число выборок из этих предметов (две выборки отличаются друг от друга составом, но не порядком предметов).

33. Сколькими способами 4 черных шара, 4 белых шара и 4 синих шара могут быть разложены в 6 различных пакетов (некоторые пакеты могут быть пустыми)?

34. Сколькими способами можно разложить 3 металлических рубля и 10 полтинников в 4 различных пакета?

35. Решите задачу 34, если пакеты неразличимы.

36. Сколькими способами можно выбрать 4 женщин и 3 мужчин из 9 женщин и 6 мужчин, если женщины a и b не могут быть выбраны одновременно? Решите ту же задачу, если одновременно не могут быть выбраны мужчины c и d, а также, если не могут быть одновременно выбраны женщина a и мужчина c.

37. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску 2 коней, чтобы они не били друг друга?

38. Докажите, что полное количество разбиений числа n на слагаемые равно количеству разбиений числа $2n$ на n слагаемых (порядок слагаемых не принимается во внимание).

39. Сколькими способами можно расположить в 9 лузах 7 белых и 2 черных шара? Часть луз может быть пустой, а лузы считаются различными.

40. Сколькими способами можно распределить в 9 лузах 7 белых, 1 черный и 1 красный шар?

41. Сколькими способами можно раздать 27 книг лицам A, B и C, чтобы A и B получили вместе вдвое больше книг, чем C?

42. В лифт вошли 8 человек. Сколькими способами они могут выйти на 4 этажах так, чтобы на каждом этаже вышел хотя бы один человек?

43. Сколькими способами можно из множества $\{1, 2, \ldots, 100\}$ выбрать три числа так, чтобы их сумма делилась на 3?

44. Сколькими способами можно из множества $\{1, 2, \ldots, 3n\}$ выбрать три числа так, чтобы их сумма делилась на 3?

45. Имеется n белых и 1 черный шар. Сколькими способами можно положить некоторые из этих шаров в $n+1$ лузу, если в каждую лузу помещается лишь один шар?

46. Сколькими способами можно получить 8 оценок по разным предметам, принимающих значения 3, 4, 5 так, чтобы их сумма равнялась 30?

47. Докажите, что r различных вещей можно разделить между $n+p$ людьми так, чтобы данные p человек получили по крайней мере по одному предмету,

$$(n+p)^r - C_n^1 (n+p-1)^r + C_n^2 (n+p-2)^r - \ldots + \\ + (-1)^n p^r$$

способами.

48. Докажите, что количество разбиений числа $2r+s$ на $r+s$ не равных нулю целых слагаемых такое же, как и количество разбиений числа r на неотрицательные целые слагаемые.

49. Общество из n членов выбирает из своего состава одного представителя. Сколькими способами может произойти голосование, если каждый голосует за одного человека (быть может, и за себя)? Решите ту же задачу, если учитывается лишь число голосов, поданных за каждого кандидата (и не учитывается, кто за него голосовал персонально).

50. Докажите, что число треугольников с целочисленными сторонами, имеющих периметр $2p$, равно числу таких же треугольников, имеющих периметр $2p-3$.

51. Докажите, что нечетное число предметов можно выбрать из n предметов 2^{n-1} способами.

52. Докажите, что число способов, которыми 2 человека могут разделить $2n$ предметов первого сорта, $2n$ предметов второго сорта и $2n$ предметов третьего сорта так, чтобы каждый получил по $3n$ предметов, равно $3n^2+3n+1$.

53. Докажите, что если в предыдущей задаче добавить $2n$ предметов четвертого сорта, то число способов раздела, при которых каждый получит по $4n$ предметов, равно

$$\frac{1}{3}(2n+1)(8n^2+8n+3).$$

54. Докажите, что если в задачах 52 и 53 предметы раскладываются в 2 неразличимых ящика, то ответы будут соответственно

$$\frac{1}{2}(3n^2 + 3n + 2) \text{ и } \frac{1}{3}(n + 1)\ (8n^2 + 4n + 3).$$

55. Докажите, что число способов раздела на 2 равные части набора, состоящего из $2nm$ предметов m сортов по $2n$ предметов каждого сорта, равно

$$C_{mn+m-1}^{m-1} - C_m^1 C_{mn+m-2n-2}^{m-1} + \ldots +$$

$$+ (-1)^k C_m^k C_{mn+m-1-k(2n+1)}^{m-1} + \ldots$$

56. Дано $2n+1$ предметов. Докажите, что из них можно выбрать нечетное число предметов столькими же способами, как и четное.

57. Докажите, что 1 руб. можно разменять монетами в 2 и 5 коп. большим числом способов, чем монетами в 3 и 5 коп.

58. Сколькими способами можно разменять 20 коп. на монеты в 1, 2 и 5 коп.?

59. Докажите, что с помощью стандартного набора разновесок: 1 мг, 2, 2, 5, 10, 20, 20, 50, 100, 200, 200, 500 мг и т. д. можно составить любой вес, выраженный целым числом миллиграммов.

60. На 2^n карточках написаны все кортежи длины n из цифр 0 и 1. Эти карточки произвольным образом положены в два ящика по 2^{n-1} карточек в каждом. Докажите, что число способов изменить одну цифру на какой-нибудь карточке из первого ящика так, чтобы кортеж стал равен одному из кортежей второго ящика не меньше 2^{n-1}.

61. Арифметический треугольник

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 7 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 15 & & 25 & & 10 & & 1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

заполнен по следующему правилу: $a_{nk} = 1$ при $k = 1$ или $k = n$, $a_{nk} = a_{n-1,\,k-1} + ka_{n-1,\,k}$. Найдите выражение a_{nk} через n и k.

62. Найдите число способов разбить n различных предметов на r (быть может, и пустых) классов так, чтобы в точности m классов содержало по k предметов.

63. Отношением в множестве X называется любое множество R, составленное из пар вида (a, b), где $a \in X$, $b \in X$. Отношение R называется рефлексивным, если оно содержит все пары вида (a, a), $a \in X$ (и, быть может, иные пары), симметричным, если из $(a, b) \in \in R$ следует $(b, a) \in R$. Сколько в n-множестве X отношений? Сколько в нем рефлексивных отношений? Сколько в нем симметричных отношений? Сколько в X симметричных и рефлексивных отношений?

64. Сколькими способами можно разбить на классы n неразличимых шаров?

65. Сколькими способами можно разделить 12 различных марок между 3 мальчиками, если

а) каждый берет по 4 марки,

б) один берет 6 марок, а остальные — по 3 марки?

66. Обозначим через $N(r, k, m)$ число способов разместить r одинаковых шаров в k ячеек так, чтобы ни в одной ячейке не лежало более m шаров. Докажите, что

$$N(r, k, m) = \sum_{j=0}^{m} N(r-j, k-1, m).$$

67. Обозначим через $N(r, k, m, j)$ число способов поместить r одинаковых шаров в k ячеек так, чтобы в каждой ячейке лежало не более m шаров и j ячеек содержало ровно m шаров. Докажите, что

$$N(r, k, m, j) = C_k^j N(r-mj, k-j, m-1).$$

68. Имеется набор состава $1^{r_1}2^{r_2}\ldots k^{r_k}$ (т. е. состоящий из r_1 различных предметов, r_2 различных пар одинаковых предметов, r_3 троек и т. д.). Докажите, что число способов разместить их в n ячеек равно

$$(C_n^1)^{r_1}(C_{n+1}^2)^{r_2}\ldots(C_{n+k-1}^k)^{r_k}.$$

69. Имеется набор состава $1^{r_1}2^{r_2}\ldots k^{r_k}$. Докажите, что производящей функцией для числа способов выбрать n элементов из этого набора является

$$(1-t^2)^{r_1}(1-t^3)^{r_2}\ldots(1-t^{k+1})^{r_k}(1-t)^{-r_1-r_2-\ldots-r_k}.$$

Напишите производящую функцию для числа способов построить кортежи длины n из набора элементов состава $1^{r_1}2^{r_2}\ldots k^{r_k}$.

70. Докажите, что число способов разбить n на слагаемые так, что ни одно число не входит в сумму более $r-1$ раз, равно числу способов разбить n на части, не делящиеся на r.

71. В выражении $x_1 : x_2 : \ldots : x_n$ для обозначения порядка действий расставляются скобки, после чего полученное выражение записывается в виде дроби с одной операцией деления. Сколько различных дробей можно получить таким путем, по-разному расставляя скобки?

72. Сколькими способами можно положить 5 белых шаров, 5 черных шаров и 5 красных шаров в 3 различных ящика, если в каждый ящик надо положить по 5 шаров?

73. Докажите, что множество из предметов трех сортов по n предметов каждого сорта можно $C_{n+2}^2 \cdot C_{n+2}^2 - 3C_{n+3}^4$ способами распределить между лицами A, B и C так, чтобы каждый получил по n предметов.

74. Сколькими способами можно наклеить марки на 40 коп., используя марки достоинством в 5, 10, 15 и 20 коп., расположенные в одну линию (расположения, отличающиеся порядком марок, рассматриваются как различные; число марок не ограничено)?

75. Сколькими способами можно разменять рубль на монеты достоинством в 10, 15, 20 и 50 коп.?

76. Сколькими способами можно составить вес в 78 *г*, пользуясь восемью разновесками в 1, 1, 2, 5, 10, 10, 20, 50 *г*? При этом считается, что применение двух разных разновесок, хотя бы и имеющих одинаковый вес, дает различные комбинации.

77. Имеется 6 шаров: 3 черных, 1 красный, 1 белый и 1 синий. Сколькими способами можно составить из них ряд, содержащий 4 шара?

78. Сколькими способами можно разбить натуральное число n на сумму 3 натуральных слагаемых (представления, отличающиеся порядком слагаемых, считаются различными)?

79. Докажите, что число n можно $E\left[\frac{1}{12}(n^2-6n+12)\right]$ способами разбить на три попарно неравные части.

80. Докажите, что число $12n+5$ можно $\frac{1}{2}(n+1)(12n^2+9n+2)$ способами разбить на четыре части, ни одна из которых не превосходит числа $6n+2$.

81. Докажите, что число $12n+5$ можно $\frac{1}{2}n(12n^2+3n-1)$ способами разбить на четыре попарно неравные части, ни одна из которых не превосходит числа $6n+2$.

82. Найдите количество троек натуральных чисел, образующих геометрическую прогрессию и не превосходящих 100.

83. Сколькими способами можно выбрать такие два числа, что их наибольший общий делитель равен G, а наименьшее общее кратное — $M = Ga^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}d^{\delta}$ (a, b, c, d — простые числа).

84. Решите ту же задачу, опустив слова «наибольший» и «наименьший».

85. Имеется n одинаковых предметов и еще n различных предметов. Сколькими способами можно выбрать из них n предметов?

86. Докажите, что число треугольников с целочисленными сторонами и периметром $4n+3$ на $n+1$ больше числа целочисленных треугольников с периметром $4n$.

87. Докажите, что число целочисленных треугольников, имеющих периметр N, задается следующей таблицей:

N	Число треугольников	N	Число треугольников
$12n$	$3n^2$	$12n+6$	$3n^2+3n+1$
$12n+1$	$n(3n+2)$	$12n+7$	$(n+1)(3n+2)$
$12n+2$	$n(3n+1)$	$12n+8$	$(n+1)(3n+1)$
$12n+3$	$3n^2+3n+1$	$12n+9$	$3n^2+6n+3$
$12n+4$	$n(3n+2)$	$12n+10$	$(n+1)(3n+2)$
$12n+5$	$(n+1)(3n+1)$	$12n+11$	$3n^2+7n+4$

88. Имеется $3n+1$ предметов, из которых n одинаковых, а остальные различны. Докажите, что из них можно извлечь n предметов 2^{2n} способами.

89. Найдите сумму коэффициентов многочлена, получающегося при раскрытии скобок в многочлене

$$(7x^3 - 13y^2 + 5z^2)^{1973} (y^3 - 8y^2 + 6y + z)^{1975} + \\ + (2x^3 + 18y^2 - 21)^{1974}.$$

90. Докажите, что если n — целое число, то $(n^2)!/(n!)^{n+1}$ — целое, а если m и n — нечетные числа, то $(mn)!/[(m!)^{n+1/2}(n!)^{m+1/2}]$ — целое.

91. Сколькими способами можно представить натуральное число m в виде суммы $x_1 + \ldots + x_p$, где x_k, $1 \leqslant k \leqslant p$,— натуральные числа, удовлетворяющие неравенствам $l \leqslant x_k \leqslant n$ (l и n — фиксированные натуральные числа).

92. Имеется 7 экземпляров одной книги, 8 — другой и 9 — третьей. Сколькими способами можно разделить их между 2 людьми так, чтобы каждый получил по 12 книг?

93. Сколькими способами можно распределить $3n$ разных книг между тремя людьми так, чтобы числа полученных ими книг образовывали арифметическую прогрессию?

94. Обозначим через Π_n^k число способов разделить n различных предметов на k групп. Докажите, что при $n > 1$ имеем

$$1 - \Pi_n^2 + 2!\,\Pi_n^3 - 3!\,\Pi_n^4 + \ldots = 0.$$

95. Имеется m ячеек, в первой из которых лежат n различных предметов, во второй — $2n$ предметов, ..., в m-й — mn предметов. Сколькими способами можно выбрать по n предметов из каждой ячейки?

96. Сколько существует четырехзначных чисел, у которых сумма первой и третьей цифр равна сумме второй и четвертой цифр?

97. На плоскости проведены два пучка прямых линий с центрами A и B, один из которых содержит p, а другой — q прямых. Никакие две прямые не параллельны, и никакая прямая не проходит через обе точки A и B. На сколько частей эти прямые делят плоскость?

98. На плоскости проведено несколько замкнутых кривых, каждая из которых пересекает все остальные по крайней мере в двух точках. Пусть n_r — число точек, в которых пересекаются r кривых. Докажите, что число замкнутых областей, ограниченных дугами этих кривых, и не содержащих внутри себя таких дуг, равно

$$1 + n_2 + 2n_3 + \ldots + rn_{r+1} + \ldots$$

99. Имеется одна карта с числом 1, 2 карты с числом 2 и т. д. Сколькими способами можно извлечь 2 карты, чтобы получить сумму n?

100. В корзине лежат $2n - r$ яблок и $2n + r$ груш. Докажите, что при заданном n число различных выборов n плодов будет наибольшим, если $r = 0$.

101. Пусть $p \geqslant q \geqslant r$ — целые числа, такие, что $p < q + r$ и $p + q + r = 2s$. Имеется p черных, q белых и r красных шаров. Докажите, что число способов раздела этих шаров между двумя лицами, при которых каждый получает s шаров, равно

$$s^2 + s + 1 - \frac{1}{2}(p^2 + q^2 + r^2).$$

Если же $q + r < p$, то ответ увеличивается на

$$\frac{1}{2}(p-s)(p-s-1).$$

102. Пусть $p_1, \ldots, p_n$ — различные простые числа и $q = p_n^{\alpha_1}, \ldots, p_n^{\alpha_n}$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — некоторые натуральные числа. Чему равна сумма делителей числа q (включая 1 и q)?

103. Сколькими способами можно составить 6 слов из 32 букв, если в совокупности этих 6 слов каждая буква используется один и только один раз?

104. Компания, состоящая из 10 супружеских пар, делится на 5 групп по 4 человека для лодочной прогулки. Сколькими способами можно разделить их так, чтобы в каждой лодке оказались двое мужчин и две женщины? Во скольких случаях данный мужчина окажется в одной лодке со своей женой? Во скольких случаях данные двое мужчин окажутся в одной лодке со своими женами?

105. На сколько частей делят пространство n плоскостей, из которых никакие 4 не проходят через одну и ту же точку, никакие 3 не проходят через одну и ту же прямую и никакие 2 не параллельны?

106. На сколько частей можно разделить цилиндрический кекс, сделав n плоских разрезов?

107. На сколько областей делят плоскость n окружностей, каждые две из которых пересекаются и никакие три из которых не проходят через одну и ту же точку?

108. На сколько областей делят пространство n попарно пересекающихся сфер, никакие 4 из которых не проходят через одну и ту же точку и никакие 3 из которых не проходят через одну и ту же окружность?

109. На сколько частей делят сферу n плоскостей, проходящих через центр сферы, никакие 3 из которых не проходят через одну прямую?

110. На сколько частей разбивается выпуклый n-угольник своими диагоналями, если никакие три из них не пересекаются внутри многоугольника?

111. Докажите, что в 3-арифметическом треугольнике в каждой строке начиная с третьей есть четное число. В каждой ли строке начиная с третьей есть число, делящееся на 3?

112. Имеется несколько гирь с весами 1, 2, . . . , n г. При каких значениях n их можно разложить на три равные по весу кучки?

113. На рис. 29 изображены две конфигурации, состоящие из точек, лежащих на прямых линиях. Сколькими способами можно отобразить на себя множество точек каждой конфигурации так, чтобы три точки, лежащие на одной прямой, перешли в три точки, лежащие на одной прямой?

114. На плоскости проведены окружность и n прямых, все точки пересечения которых лежат внутри окружности. На сколько частей эти линии делят плоскость?

115. На плоскости проведены окружность и n прямых, занумерованных числами 1, 2, . . ., n. Прямая с номером r при нечетном r пересекает внутри круга лишь одну из прямых с номерами 1, 2, . . ., $r-1$, а при четном r — все эти прямые. На сколько частей эти прямые делят внутренность круга?

116. Докажите, что число попарно неравных целочисленных треугольников, имеющих наибольшую сторону l, равно $(l+1)^2/4$, если l нечетно, и $l(l+2)/4$, если l четно.

117. Обозначим через f_n число попарно неравных целочисленных треугольников, все стороны которых меньше $2n+1$, а через g_n — число треугольников, все стороны которых меньше $2n+2$. Установите связь между f_n и g_n.

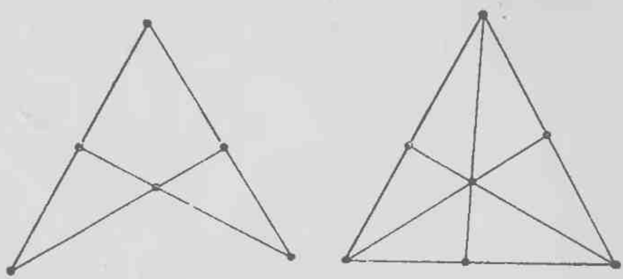


Рис. 29.

118. Найдите коэффициент при x^m в разложении

а) $(1+x)^k + (1+x)^{n+1} + \ldots + (1+x)^n$;

б) $(1+x+\ldots+x^{n-1})^k$.

119. Докажите следующие соотношения для чисел Фибоначчи:

а) $u_{n+m} = u_{n-1}u_m + u_n u_{m+1}$;

б) $u_1 + u_3 + \cdots + u_{2n-1} = u_{2n}$;

в) $u_2 + u_4 + \cdots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1$;

г) $u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 = u_n u_{n+1}$;

д) $u_{n+1}^2 = u_n u_{n+2} + (-1)^n$;

е) $u_1u_2 + u_2u_3 + \cdots + u_{2n-1}u_{2n} = u_{2n}^2$.

120. Докажите, что любое натуральное число N можно представить в виде суммы чисел Фибоначчи, причем каждое число входит в сумму не более одного раза и никакие два соседних числа не входят вместе.

121. Система частиц, подчиненная статистике Бозе — Эйнштейна, состоит из 4 идентичных частиц. Полная энергия равна $4E_0$, уровни энергии принимают значения kE_0, причем уровень с энергией kE_0 имеет k^2+1 ячеек. Сколько различных конфигураций имеет эта система? Решите ту же задачу, если частицы подчинены статистике Ферми — Дирака, причем уровню энергии kE_0 отвечают $2(k^2+1)$ состояний.

122. Имеется 3 идентичные частицы, из которых 2 расположены в одной потенциальной яме, а одна — в другой. Полная энергия частиц равна $3E_0$. Уровни энергии имеют вид kE_0 и допускают $2(k^2+1)$ состояний. Найдите число конфигураций, если частицы подчинены статистике Ферми — Дирака.

123. Система состоит из N молекул, в каждую из которых входит один A-атом и два B-атома, занимающих два из четырех возможных положений. Сколько конфигураций имеет эта система? Решите ту же задачу, если молекулы могут захватывать у других один или два B-атома. Решите ту же задачу, если вместо двух B-атомов в молекулу входят B-атом и C-атом.

Глава V

КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Перестановки с ограничениями

Сколькими способами можно переставить буквы слова «перемет» так, чтобы три буквы «е» не шли подряд?

Сначала подсчитаем, во скольких перестановках все три буквы «е» идут подряд. Мы можем в этих перестановках объединить буквы «е» в один блок и переставлять этот блок вместе с буквами «п», «р», «м», «т». Получатся перестановки из 5 объектов, число которых равно $P_5 = 5! = 120$. А перестановок с повторениями из букв слова «перемет» можно составить $P(3, 1, 1, 1, 1) = 840$. Значит, число перестановок, в которых три буквы «е» не идут подряд, равно $840-120 = 720$.

В этой задаче надо было найти число перестановок, подчиненных некоторому ограничительному условию — запрету трем буквам «е» стоять рядом. Такие задачи с различного вида ограничениями часто встречаются в комбинаторике. В некоторых из них можно применить тот же метод, что и в решенной сейчас задаче — объединение нескольких элементов в блоки.

Пусть, например, *4 танкиста, 4 летчика и 2 артиллериста хотят сфотографироваться, стоя в один ряд, так чтобы представители одного рода войск стояли рядом. Сколькими способами они могут это сделать?*

И здесь мы сначала объединим их в блоки, которые обозначим Л, Т и А. Из этих блоков можно сделать $3! = 6$ перестановок. Но еще можно переставлять фотографирующихся внутри блоков. Танкистов можно переставлять $4!$ способами, летчиков — тоже $4!$ способами, а артиллеристов — $2!$ способами. Всего по правилу произведения получаем $3!\cdot 4!\cdot 4!\cdot 2! = 6912$ способов.

Вообще, пусть имеется n_1 предметов одного сорта, n_2 предметов другого сорта,. . . , n_k предметов k-го сорта, где предметы одного и того же сорта все же различимы друг от друга. Тогда число перестановок этих предметов, в которых все предметы одного и того же сорта стоят рядом, равно $n_1!n_2!\dots n_k!\,k!$.

Строительство лестницы

Строится лестница, ведущая из точки A в точку B (рис. 30). *Расстояние AC равно 4,5 м, а расстояние CB —*

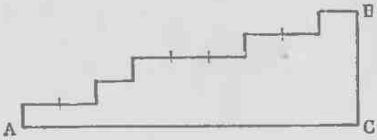


Рис. 30.

1,5 м. Высота каждой ступеньки равна 30 см, а ее ширина должна быть целым кратным 50 см. Сколькими способами можно построить лестницу?

Из условия задачи видно, что лестница должна иметь 5 ступенек и состоять из 9 «блоков» длиной 50 *см*. Поэтому ступеньки можно строить в 10 местах. Таким образом, надо из 10 мест выбрать 5, а это можно сделать $C_{10}^5 = 252$ способами.

В общем виде решенная сейчас задача формулируется так.

Сколькими способами можно расставить m нулей и k единиц так, чтобы никакие две единицы не стояли рядом?

В самом деле, лестницу всегда можно зашифровать последовательностью нулей и единиц: нуль означает место, где ломаная идет вправо, а единица — место, где она идет вверх. Например, лестница, изображенная на рис. 30, шифруется так: 10010100010010. При этом, поскольку ступенек двойной высоты на лестнице быть не может, в последовательности не могут идти две единицы подряд.

Эта задача решается точно так же, как разобранный выше частный случай. Сначала выписываем m нулей. Для единиц получается $m + 1$ место — два места по краям и еще $m - 1$ мест в промежутках между нулями. На любое из этих $m + 1$ мест можно поставить одну из k единиц. А это может быть сделано C_{m+1}^k способами. Итак, существует C_{m+1}^k способов расставить m нулей и k единиц так, чтобы никакие две единицы не шли рядом.

Книжная полка

На книжной полке стоят 12 книг. Сколькими способами можно выбрать из них 5 книг так, чтобы никакие две из них не стояли рядом?

Эта задача сводится к только что решенной. Зашифруем каждый выбор книг кортежем из 7 нулей и 5 единиц — нули ставятся на местах, где книги остаются, а 1 — на местах, где их берут. Так как по условию никакие две выбранные книги не могут стоять рядом, то в этих кортежах не стоят рядом никакие две единицы. Как мы видели, число таких кортежей равно $C_8^5 = 56$.

Вообще если на полке стоят n книг и выбирают k книг так, чтобы никакие две из них не стояли рядом, то это можно сделать C_{n-k+1}^k способами. Отсюда следует, что задача разрешима лишь при условии, что $2k \leqslant n + 1$.

Общее число способов выбрать несколько книг из n так, чтобы выбираемые книги не стояли рядом, равно

$$C_{n+1}^0 + C_n^1 + C_{n-1}^2 + \dots$$

Рыцари короля Артура

За круглым столом короля Артура сидят 12 рыцарей. Из них каждый враждует со своим соседом. Надо выбрать 5 рыцарей, чтобы освободить заколдованную принцессу. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных рыцарей не было врагов?

В этой задаче надо из 12 сидящих за круглым столом рыцарей выбрать 5 так, чтобы никакие два из них не сидели рядом. Эта задача легко сводится к аналогичной задаче, в которой все рыцари сидят в ряд. Для этого возьмем какого-нибудь рыцаря, например сэра Ланселота. Все выбираемые комбинации рыцарей распадаются на два класса — в одних из них сэр Ланселот участвует, а в других — нет. Подсчитаем, сколько комбинаций входит в каждый класс.

Если сэр Ланселот отправляется освобождать заколдованную принцессу, то ни его сосед справа, ни его сосед слева уже не примут участия в этой экспедиции. Остаются 9 рыцарей, из которых надо выбрать 4 спутников для сэра Ланселота. Так как других врагов, кроме двух уже исключенных соседей, у сэра Ланселота нет, то надо лишь проследить, чтобы среди выбранных 4 рыцарей не было врагов, т. е., чтобы никакие два из них не сидели рядом. По исключение сэра Ланселота и его двух соседей разрывает цепь рыцарей, и можно считать, что они сидят не за круглым столом, а в один ряд. В этом случае получаем $C_6^4 = 15$ возможных комбинаций.

Теперь подсчитаем, сколько можно составить экспедиций без участия сэра Ланселота. В этом случае его можно сразу исключить из числа рыцарей круглого стола. А тогда цепь рыцарей и их взаимоотношений разрывается и остаются 11 рыцарей, расположенных в ряд, из которых надо выбрать 5 рыцарей так, чтобы никакие два из них не сидели рядом. Это можно сделать $C_7^5 = 21$ способами. Таким образом, общее число допустимых вариантов экспедиции равно $15 + 21 = 36$.

Вообще *если за круглым столом сидят n рыцарей и надо выбрать из них k рыцарей так, чтобы в их число не попали никакие два соседа, то это можно сделать $C_{n-k}^{k} + C_{n-k-1}^{k-1}$ способами.* Предоставляем читателю провести доказательство этого утверждения самостоятельно.

Девушка спешит на свидание

Когда-то на экранах страны шла кинокомедия под таким названием. В ней рассказывалось о злоключениях двух курортников, забывших дома паспорта. Им выслали паспорта по почте, но девушка из почтового отделения спешила на свидание и в спешке перепутала конверты — паспорт одного лег в конверт с адресом другого, а паспорт другого — в конверт с адресом первого. Хорошо, что ей не пришлось одновременно обрабатывать 5 конвертов — тогда не двоим, а пятерым пришлось бы ночевать на жестких скамейках курортного парка...

Впрочем, это не совсем так: ведь случайно она могла бы положить некоторые из паспортов в нужные конверты. Возникает вопрос, во скольких же случаях произошла бы полная путаница, т. е. никто не получил бы своего паспорта.

Так как каждого адресата и каждый паспорт можно занумеровать числами от 1 до 5, то распределение паспортов можно задать такой схемой

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5, \end{matrix}$$

где a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 — те же числа 1, 2, 3, 4, 5, но взятые в ином порядке. Эта схема означает, что первый человек получает паспорт человека с номером a_1, второй — паспорт a_2 и т. д. Поскольку первая строка во всех схемах одна и та же, ее можно опустить, а тогда каждый способ распределения паспортов окажется задан некоторой перестановкой $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ чисел 1, 2, 3, 4, 5. Если, например, второй человек получил свой паспорт, то $a_2 = 2$, т. е. число 2 в этой перестановке стоит на своем месте.

Теперь задачу можно сформулировать в общем виде так: *найти число перестановок n элементов, при которых ни один из элементов не стоит на своем месте.* Такие перестановки называют *смещениями*, а их число обозначают D_n. Мы отложим решение этой задачи и разберем сначала еще более обширный круг задач о запретных зонах.

Запретные зоны

Мы знаем, что каждую перестановку n чисел $1, 2, \ldots, n$ можно изобразить, поставив n ладей на квадратную доску с n горизонталями и n вертикалями — если перестановка имеет вид $(a_1, \ldots, a_n)$, то ладьи занимают пересечения k-х вертикалей с a_k-ми горизонталями. При этом ни одна ладья не бьет другую, так как ни номера горизонталей, ни номера вертикалей в парах $(1, a_1), \ldots, (n, a_n)$ не повторяются.

В задаче о паспортах берутся не все перестановки, а лишь такие, при которых ни одно число не стоит на своем месте. В этом случае ни одна ладья не может занять поля с номерами $(1, 1), \ldots, (n, n)$, а это как раз поля на диагонали. Иными словами, в этой задаче требуется найти число расстановок ладей, при которых ни одна ладья не попадает на диагональ.

Разумеется, вместо диагонали можно выбрать любое другое множество запретных полей, а число ладей может быть любым. Мы приходим, таким образом, к следующей задаче: *часть полей прямоугольной шахматной доски с m горизонталями и n вертикалями окрашена в черный цвет, а часть — в белый* (не надо только думать, что эта окраска идет в «шахматном» порядке). *Сколькими способами можно расставить на белых полях доски k ладей так, чтобы ни одна из них не могла взять другую*? Разумеется, можно считать просто, что черные поля вырезаны, и расставлять ладьи прямо на белопольной доске, которую мы обозначим через D. Для доски D число способов поставить требуемым образом k ладей называют *k-м ладейным числом* и обозначают t_k. Впервые эти числа ввел советский математик С. Е. Аршон в середине 30-х годов (в докладе, сделанном в 1934 г. на втором Всесоюзном математическом съезде, и в статье «Решение одной комбинаторной задачи», опубликованной в сборнике «Математическое просвещение», 1936, № 8). Подробное изложение свойств этих чисел он хотел сделать в книге «Новая комбинаторная алгебра». К сожалению, после безвременной смерти автора рукопись книги погибла во время войны. Вновь те же самые числа придумали в 1945 г. американские математики Капланский и Риордан. Они ввели еще многочлен

$$T_D(x) = t_0 + t_1x + \ldots + t_kx^k + \ldots,$$

названный *ладейным многочленом* для данной доски.

Общая формула

В задаче о смещениях у нас на самом деле две доски — бело- и чернопольная (черным закрашиваются лишь поля диагонали). Ладейное число t_k надо найти для белопольной доски. Но она устроена куда сложнее чернопольной доски, состоящей из n не связанных друг с другом квадратов. Поэтому было бы весьма желательно получить формулу, связывающую ладейные числа этих двух досок.

Предварительно найдем ладейные числа для полной доски, состоящей из m горизонталей и n вертикалей. Чтобы поставить на такую доску k ладей, надо сначала выбрать k горизонталей, что возможно C_m^k способами, а затем расставить на них k ладей, что можно сделать A_n^k способами. Значит, для такой доски k-е ладейное число равно $C_m^k A_n^k$.

Предположим теперь, что $(m \times n)$-доска разбита на черную и белую части и что мы знаем ладейные числа t_k' для чернопольной доски. Подсчитаем, сколькими способами можно поставить r ладей на доску так, чтобы не менее k ладей стояли на черных полях. Для этого надо сначала расположить k ладей на черных полях, чтобы они не били друг друга. Это можно сделать t_k' способами. Затем занятые k горизонталей и k вертикалей следует вычеркнуть и на оставшуюся $[(m-k) \times (n-k)]$-доску поставить остальные $r-k$ ладьи, не обращая внимания на цвет полей, а следя лишь за тем, чтобы они не били друг друга. Это можно сделать $C_{m-k}^{r-k} A_{n-k}^{r-k}$ способами. По правилу произведения получаем $C_{m-k}^{r-k} A_{n-k}^{r-k} t_k'$ требуемых расстановок ладей.

Теперь мы уже можем вывести основную формулу всей теории запретных зон, связывающую ладейные числа для черной и белой досок. Для этого воспользуемся формулой включений и исключений. Занумеруем все черные поля и обозначим через X множество всех допустимых расстановок ладей на $(m \times n)$-доске, а через X_α — множество расстановок, при которых занято α-е черное поле. Тогда $X_{\alpha_1} \cap \ldots \cap X_{\alpha_k}$ — множество расстановок, при которых заняты черные поля с номерами $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Все слагаемые вида $n(X_{\alpha_1} \cap \ldots \cap X_{\alpha_k})$ в формуле включений и исключений имеют знак $(-1)^k$. Если сложить все эти слагаемые при заданном значении k, то получаются все расстановки, в которых занято не менее k черных полей. А число таких расстановок, как мы знаем, равно $C_{m-k}^{r-k} A_{n-k}^{r-k} t_k'$. Замечательно, что мы нашли это число, не зная отдельных слагаемых — ведь для некоторых выборов черных полей может и не существовать искомых расстановок. А теперь, применяя формулу включений и исключений, получаем

$$t_r = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k C_{m-k}^{r-k} A_{n-k}^{r-k} t_k', \tag{1}$$

где t_r — ладейные числа для белопольной доски.

Точно так же доказывается, что число расстановок r ладей, из которых p стоят на черных, а остальные — на белых полях, равно

$$\sum_{k=0}^{r-p}(-1)^k C_{p+k}^k C_{m-p-k}^{r-p-k} t_{p+k}^{*}. \tag{2}$$

Формула (1) позволяет свести подсчет ладейных чисел для белопольных досок к подсчету тех же чисел для чернопольных досок. А это в некоторых случаях проще сделать. Например, если доска D распадается на две доски

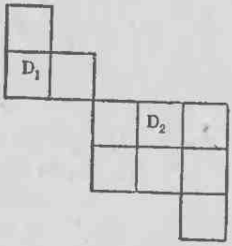


Рис. 31.

D_1 и D_2, не имеющих ни общих горизонталей, ни общих вертикалей (рис. 31), то справедлива формула

$$T_D(x) = T_{D_1}(x)\, T_{D_2}(x) \equiv (t_0 + t_1 x + \ldots)(q_0 + q_1 x + \ldots). \tag{3}$$

В самом деле, поставить k ладей на доску D_1, а l ладей на доску D_2 можно по правилу произведения $t_k q_l$ способами. Поэтому поставить r ладей на доску D можно $t_0 q_r + t_1 q_{r-1} + \ldots + t_r q_0$ способами (расстановки классифицируются по числу ладей, стоящих на доске D_1). А это как раз коэффициент при x^r в произведении многочленов $T_{D_1}(x)$ и $T_{D_2}(x)$.

Так как для одной клетки ладейный многочлен имеет вид $1 + x$, то для диагонали квадрата, состоящей из n клеток, он равен $(1 + x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k$.

Значит, для диагонали ладейные числа имеют вид $t_k^{*} = C_n^k$.

Теперь мы можем довести до конца вычисление D_n, т. е. числа способов расстановки n ладей на квадратной доске так, чтобы ни одна из ладей не стала на диагональ.

В этом случае $n = m = r$ и мы получаем по формуле (1)

$$D_n \equiv t_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (n-k)! \tag{4}$$

В частности, если $n = 5$, то имеем

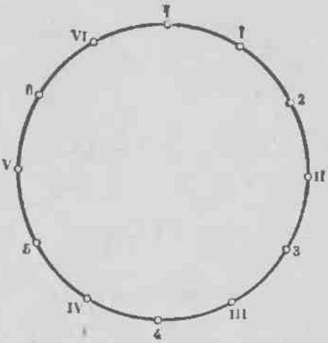
$$D_5 = 5! - C_5^1 \cdot 4! + C_5^2 \cdot 3! - C_5^3 \cdot 2! + C_5^4 \cdot 1! - C_5^5 \cdot 1! = 44.$$

Значит, есть 44 способа распределения паспортов по конвертам, при которых ни один паспорт не попадает в соответствующий конверт.

За обеденным столом

К супругам Леонтьевым на праздничный обед пришли в гости 5 супружеских пар. Решили сесть за обеденный стол так, чтобы мужчины и женщины чередовались, причем ни одна пара супругов не сидела рядом друг с другом. Сколькими способами могут эти 6 пар сесть за стол?

Рис. 32.



Посадим сначала за стол женщин. Хозяйка дома может выбрать любое из 12 мест. После этого для остальных женщин остается 5 мест (ведь две женщины не должны сидеть рядом друг с другом). Их можно посадить на эти места $5! = 120$ способами. Всего получилось $12 \cdot 5! = 1440$ способов. А теперь будем рассаживать мужчин. Перенумеруем занятые места по часовой стрелке цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, где 1 — место, занятое Леонтьевой (рис. 32), а свободные места — римскими цифрами I, II, III, IV, V и

VI, где I — место, следующее за местом хозяйки дома. Тогда хозяин дома может сесть на любое место, кроме мест I и VI (они находятся рядом с его супругой), муж гостьи, занявшей место 2 — на любом из мест, кроме I и II и т. д. Иными словами, рассадить гостей — это все равно, что расставить ладьи на доске, изображенной на рис. 33.

Обобщая эту задачу, приходим к такой постановке вопроса: *сколькими способами можно поставить n ладей на $(n \times n)$-доску так, чтобы они не били друг друга и чтобы*

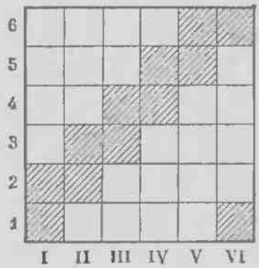


Рис. 33.

ни одна ладья не стояла на полях вида (k, k), $1 \leqslant k \leqslant n$, $(k, k+1)$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$ и $(n, 1)$?

Если бы мы знали число способов t_k поставить k ладей на запретные поля так, чтобы они не били друг друга, то задача решалась бы по формуле (1):

$$t_n = n! - (n-1)!\,t_1' + (n-2)!\,t_2' - \\ - \ldots + (-1)^k (n-k)!\,t_k' + \ldots + (-1)^n t_n'. \qquad (5)$$

Задача свелась к подсчету числа способов поставить k ладей на запретные поля, а это легче, так как их меньше, чем допустимых полей. Запишем $2n$ запретных полей по кругу, выписав сначала поля первой горизонтали, потом — второй и т. д. Если поставить единицы на полях, занятых ладьями, а на остальных полях написать нули, то получим круговую расстановку k единиц и $2n-k$ нулей. При этом соседние поля на окружности соответствуют на доске полям, стоящим на одной горизонтали или одной вертикали. Поэтому две единицы не могут стоять рядом, т. е. t_k' равно числу способов написать по кругу k единиц и $2n-k$ нулей так, чтобы никакие две единицы не стояли рядом. А это можно сделать, как мы уже сосчитали $C_{2n-k}^{k}+C_{2n-k-1}^{k-1}=\frac{2n}{2n-k}C_{2n-k}^{k}$ способами (см. стр. 164). Подставляя это значение в формулу (5), получаем ответ.

Разбушевавшиеся слоны

При вычислении ладейных многочленов оказывается полезной следующая формула:

$$T_D(x)=T_{D'}(x)+xT_{\bar{D}}(x). \tag{6}$$

Здесь через D' обозначена доска, полученная из доски D вычеркиванием некоторого поля a, а через $\bar{D}$ — доска, получаемая из D вычеркиванием не только самого поля a, но и горизонтали и вертикали, на пересечении которых она находится. Чтобы доказать формулу (6), достаточно заметить, что при любой расстановке k ладей поле a оказывается либо свободным, либо занятым. Число расстановок, при которых это поле свободно, совпадает с числом расстановок ладей на доске D' (для таких расстановок поле a можно безболезненно удалить). Если же поле a занято, то уже ни одно поле вертикали и горизонтали, на которых расположено поле a, занимать нельзя. Поэтому их надо вычеркнуть, а оставшиеся ладьи располагать на доске $\bar{D}$. Значит, число расстановок второго вида равно числу расстановок $k-1$ ладей на доске D'.

Итак, коэффициент при x^k в многочлене $T_D(x)$ равен сумме коэффициента при x^k в $T_{D'}(x)$ и коэффициента при x^{k-1} в $T_{\bar{D}}(x)$. Это утверждение и выражено формулой (6).

Решим с помощью формулы (6) такую задачу.

Сколькими способами можно расставить на шахматной доске k белопольных слонов так, чтобы они не могли бить друг друга?

Для решения этой задачи повернем шахматную доску на 45° и оставим на ней лишь белые поля. Так как слоны ходят по диагоналям, то после поворота доски речь будет идти уже о вертикалях и горизонталях. Но доска будет уменьшенной, такой, как на рис. 34. Итак, нам надо найти число способов расставить ладьи на этой доске так, чтобы они не били друг друга. С помощью перестановок вертикалей и горизонталей превратим эту доску в изображенную на рис. 35.

Такая доска является представителем обширного класса досок, у которых первая горизонталь содержит n_1 идущих друг за другом полей, вторая — n_2 так же расположенных полей, ..., m-я строка — n_m таких же полей, причем $n_1 \leqslant n_2 \leqslant \ldots \leqslant n_m$, а все первые поля строк стоят на одной и той же вертикали (в первом столбце). Такие доски называют *диаграммами Юнга*. Они встречаются во многих областях математики, например, в теории представлений групп. Назовем кортеж $(n_1, n_2, \ldots, n_m)$ *ко-*

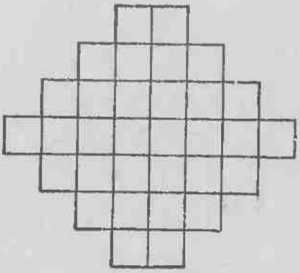


Рис. 34.

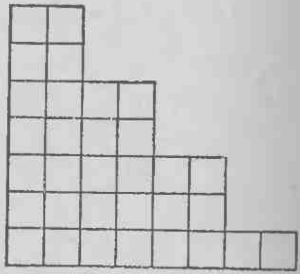


Рис. 35.

дом диаграммы Юнга, а соответствующий ладейный многочлен обозначим $T(n_1, n_2, \ldots, n_m; x)$.

Для любого поля a первой горизонтали доска D' имеет при $n_1 > 1$ код $(n_1 - 1, n_2, \ldots, n_m)$, а при $n_1 = 1$ код $(n_2, \ldots, n_m)$, а доска $\widetilde{D}$ при $n_2 > 1$ имеет код $(n_2 - 1, \ldots, n_m - 1)$. Поэтому по формуле (6) из предыдущего пункта получаем, что при $n_1 > 1$

$$T(n_1, n_2, \ldots, n_m; x) =$$
$$= T(n_1 - 1, n_2, \ldots, n_m; x) + xT(n_2 - 1, \ldots, n_m - 1; x).$$

Применяя еще $n_1 - 1$ раз эту формулу к первому слагаемому, получим, что при $n_2 > 1$

$$T(n_1, n_2, \ldots, n_m; x) =$$
$$= T(n_2, \ldots, n_m; x) + n_1 xT(n_2 - 1, \ldots, n_m - 1; x). \qquad (7)$$

В слагаемых, стоящих в правой части этого равенства, число горизонталей уже равно $m - 1$. Продолжая этот процесс, сведем все к диаграмме Юнга, имеющей одну горизонталь, а для такой диаграммы имеем $T(n, x) = 1 + nx$.

Так как код диаграммы Юнга на рис. 35 равен (2, 2, 4, 4, 6, 6, 8), то последовательно получим

$$T(2, 2, 4, 4, 6, 6, 8; x) = T(2, 4, 4, 6, 6, 8; x) + 2xT(1, 3, 3, 5, 5, 7; x) = \ldots = 1 + 32x + 356x^2 + 1704x^3 + 3532x^4 + 2816x^5 + 632x^6 + 16x^7.$$

Например, трех слонов можно поставить 1704 способами.

Симметричные расстановки

Рассмотрим теперь расстановки n ладей на $(n \times n)$-доске, удовлетворяющие некоторым условиям симметрии.

Самым простым является случай, когда требуется, чтобы ладьи стояли симметрично относительно центра доски. Обозначим через G_n число решений задачи, когда число ладей равно n. Тогда имеет место рекуррентное соотношение

$$G_{2n} = 2nG_{2n-2}. \quad (8)$$

В самом деле, будем ставить $2n$ ладей на $(2n \times 2n)$-доску. Ладья, стоящая на первой вертикали, может занять на ней любое из $2n$ полей. По условию этим определяется положение ладьи, стоящей на последней вертикали — она должна расположиться симметрично с первой ладьей относительно центра доски. Вычеркнем первую и последнюю вертикали, а также занятые ладьями горизонтали (так как число горизонталей четно, выбрасываемые ладьи не могут стоять на одной и той же горизонтали). Получается доска из $2n - 2$ горизонталей и вертикалей. Ясно, что каждому симметричному расположению ладей на новой доске соответствует симметричное исходное расположение ладей. Отсюда и вытекает, что G_{2n} в $2n$ раз больше, чем G_{2n-2}. Из рекуррентного соотношения (8) вытекает, что $G_{2n} = 2^n \cdot n!$

А теперь рассмотрим случай, когда доска состоит из $2n + 1$ горизонталей и вертикалей. В этом случае одна ладья обязана стоять в центре доски. Поле, которое она занимает, само себе симметрично. Вычеркивая центральные горизонталь и вертикаль, получаем $(2n \times 2n)$-доску, на которую предстоит поставить $2n$ ладей, что можно сделать G_{2n} способами. Значит, $G_{2n+1} = G_{2n}$.

Аналогично разбирается вопрос о расстановках ладей на $(n \times n)$-доске, не меняющихся при вращении доски на 90°. Для числа R_n таких расстановок верна рекуррентная формула

$$R_{4n} = (4n - 2)\ R_{4n-4}, \tag{9}$$

из которой следует, что

$$R_{4n} = 2^n (2n - 1)\ (2n - 3) \ldots 1. \tag{10}$$

Далее, имеем $R_{4n+1} = R_{4n}$, а R_{4n+2} и R_{4n+3} равны нулю. В самом деле, если имеется расстановка ладей с требуемым свойством, то каждая ладья либо стоит в центре, либо входит в четверку ладей, переходящих друг в друга при повороте доски на 90°. Поэтому число ладей равно или $4n$ (когда на доске нет центрального поля) или $4n + 1$.

Найдем теперь число Q_n расположений n ладей на $(n \times n)$-доске, симметричных относительно диагонали квадрата (для определенности берем диагональ, проходящую через левое угловое поле). Разбиваем все расстановки на два класса: такие, что одна ладья стоит в левом нижнем углу, и все остальные. Число расстановок первого класса равно Q_{n-1} (ладья вычеркивается вместе с нижней горизонталью и левой вертикалью). Во втором же случае в левой вертикали стоит какая-то ладья, не занимающая нижнего поля вертикали. Для нее есть симметричная ладья на нижней горизонтали. Вычеркивая горизонтали и вертикали, на которых стоят выбранные ладьи, получаем $[(n - 2) \times (n - 2)]$-доску и приходим к задаче о расстановках $n - 2$ ладей на такой доске. Так как на левой вертикали ладья могла занимать любое из $n - 1$ полей, то Q_n должно удовлетворять рекуррентному соотношению

$$Q_n = Q_{n-1} + (n - 1)\ Q_{n-2}. \tag{11}$$

Можно показать, что решением этого соотношения является

$$Q_n = 1 + C_n^2 + \frac{1}{1\cdot 2} C_n^2 C_{n-2}^2 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} C_n^2 C_{n-2}^2 C_{n-4}^2 + \ldots \tag{12}$$

(надо разбить все искомые расположения ладей на классы, отнеся в s-й класс расположения, при которых s пар ладей не попадают на диагональ).

Аналогично показывается, что число B_n расстановок n ладей на $(n \times n)$-доске, при которых ладьи не бьют друг друга и расположены симметрично относительно обеих диагоналей, удовлетворяет соотношениям

$$\left.\begin{aligned} B_{2n} &= 2B_{2n-2} + (2n-2)\,B_{2n-4}, \\ B_{2n+1} &= B_{2n}. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Караван в пустыне

Задачи, которые мы решали на стр. 161—164, имеют иной характер, чем задачи о паспортах или о гостях. В них запреты налагались не на позиции, занимаемые тем или иным элементом, а на взаимное расположение этих элементов. Чаще всего в таких задачах речь идет о соседстве одной или нескольких пар элементов, и запрету подлежит некоторое множество таких пар. Эти задачи во многих случаях удается решить, применив к перестановкам формулу включений и исключений и классифицируя эти перестановки по числу входящих в них запрещенных пар.

По пустыне идет караван из 9 верблюдов. Путешествие длится много дней, и, наконец, всем надоедает видеть впереди себя одного и того же верблюда. Сколькими способами можно переставить верблюдов так, чтобы впереди каждого верблюда шел иной верблюд, чем раньше?

Такие перестановки наверняка существуют. Например, можно переставить всех верблюдов в обратном порядке, так что последний окажется первым и т. д. Ведь, как гласит арабская пословица, «когда караван поворачивает назад, хромой верблюд оказывается впереди».

Для решения задачи перенумеруем верблюдов в первоначальном порядке от конца каравана к началу числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Нам нужно найти все перестановки этих чисел, в которых нет ни одной из пар (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7), (7, 8), (8, 9). Сосчитаем, во скольких перестановках этих чисел участвует пара (1, 2). Мы можем считать в этих перестановках такую пару за один элемент. Поэтому общее число переставляемых элементов будет уже не 9, а 8 и их число равно 8! Тот же результат получаем и для остальных 7 запрещенных пар.

Теперь рассмотрим перестановки, запрещенные по крайней мере дважды, т. е. содержащие две запрещенные пары. Возможны два случая — две запрещенные пары либо не имеют общих элементов, либо имеют один общий элемент. В первом случае объединим вместе элементы каждой пары. У нас останется всего 7 переставляемых элементов (2 пары, переставляемые как целое, и 5 элементов, не попавших ни в одну из этих пар). Число таких перестановок равно 7!. Во втором случае три элемента, входящие в две запрещенные пары, должны идти подряд (например, если в перестановку входят пары (3, 4) и (4, 5), то в ней подряд идут элементы 3, 4, 5). Объединим эти три элемента вместе. Тогда перестановкам подлежат снова 7 элементов — 1 блок из трех элементов и 6 элементов, не вошедших в блок. Число таких перестановок опять равно 7!.

Совершенно так же доказывается, что какие бы k запрещенных пар мы ни взяли, число перестановок, содержащих все эти k пар, равно $P_{9-k} = (9-k)!$. Но k пар из 8 можно выбрать C_8^k способами. По формуле включений и исключений получаем, что количество перестановок, не содержащих ни одной запрещенной пары, равно

$$P_9 - C_8^1 P_8 + C_8^2 P_7 - \ldots + C_8^8 P_1 =$$
$$= 8!\left[9 - \frac{8}{1!} + \frac{7}{2!} - \ldots + \frac{1}{8!}\right] = 148\,329.$$

Аналогично доказывается, что количество перестановок из чисел 1, 2, ..., n, не содержащих ни одной из пар (1, 2), (2, 3), ..., $(n-1, n)$, выражается формулой

$$E_n = (n-1)!\left[n - \frac{n-1}{1!} + \frac{n-2}{2!} - \ldots +\right.$$
$$\left. + (-1)^{k-1}\frac{n-k+1}{(k-1)!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right]. \qquad (14)$$

Можно показать, что $E_n = D_n + D_{n-1}$, где D_n — число смещений из n элементов. Совершенно так же доказывается, что количество перестановок из n элементов, в которые не входят $r \leqslant n-1$ пар, равно

$$P_n - C_r^1 P_{n-1} + C_r^2 P_{n-2} - \ldots + (-1)^r C_r^r P_{n-r}. \qquad (15)$$

На решенную сейчас задачу похожа следующая.

На карусели катаются n ребят. Они решили пересесть — так, чтобы у каждого из них сменился впереди сидящий. Сколькими способами они могут это сделать?

Рассуждения, почти совпадающие с проведенными выше, показывают, что в этом случае ответ выражается формулой

$$F_n = P_{n-1} - C_n^1 P_{n-2} + C_n^2 P_{n-3} - \ldots + \\ + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} P_0 + (-1)^n C_n^n. \qquad (16)$$

Можно доказать, что

$$F_n = D_{n-1} - D_{n-2} + D_{n-3} - \ldots + (-1)^{n-3} D_2.$$

Затруднение мажордома

Однажды мажордом короля Артура обнаружил, что к обеду за круглым столом приглашено 6 пар враждующих рыцарей. Сколькими способами можно рассадить их так, чтобы никакие два врага не сидели рядом?

Эта задача похожа на задачу о супружеских парах, но отличается от нее тем, что в задаче о супружеских парах требовалось не только, чтобы супруги были разделены друг от друга, но и чтобы рядом не сидели двое мужчин или две женщины. В задаче о рыцарях этих условий нет — надо лишь, чтобы рядом не сидели никакие два врага. Мы решим задачу в общем виде, когда число пар враждующих рыцарей равно m.

Для решения задачи воспользуемся снова формулой включений и исключений. Обозначим через A_k множество способов рассаживания, при которых k-я пара враждующих рыцарей сидит рядом, и подсчитаем $n(A_1 \cap \ldots \cap A_k)$, т. е. число способов посадить рыцарей так, чтобы враги из первых k пар оказались рядом. Сначала усадим за стол врагов. Первую пару можно разместить $4m$ способами: $2m$ способами выбрать место для первого из врагов, а второго посадить рядом с ним слева или справа. Для остальных рыцарей останется $2m - 2$ мест, причем их надо занять так, чтобы рыцари из 2-й, 3-й,..., k-й пары врагов сидели рядом. Объединим рыцарей из каждой пары в один «объект». Эти $k - 1$ пар рыцарей и $2m - 2k$ остальных рыцарей можно переставлять друг с другом $(2m - k - 1)!$ способами. Если взять одну из таких перестановок и посадить рыцарей по порядку на свободные места, то выбранные нами k пар врагов окажутся рядом. Это условие не нарушится и в случае, если мы поменяем местами некоторых сидящих рядом врагов. Так как такие пересаживания можно сделать 2^{k-1} способами, то всего получаем $2^{k+1}\, m \cdot (2m-k-1)!$ способов посадки. Таким образом,

$$n(A_1 \cap \ldots \cap A_k) = 2^{k+1} m \cdot (2m-k-1)!.$$

Применяя частный случай формулы включений и исключений, получаем

$$n(A_1' \cap \ldots \cap A_m') =$$
$$= 2m[(2m-1)! - 2C_m^1 (2m-2)! + 2^2 C_m^2 (2m-3)! +$$
$$+ \ldots + (-1)^k 2^k C_m^k (2m-k-1)! + \ldots +$$
$$+ (-1)^m 2^m (m-1)!].$$

Но $n(A_1' \cap \ldots \cap A_m')$ и есть искомое число способов посадить рыцарей так, чтобы ни одна пара врагов не сидела рядом. Если учитывать лишь взаимное расположение рыцарей, то ответом будет выражение, стоящее в квадратных скобках.

Очередь в кассу

У кассы кинотеатра стоит очередь из $m+k$ человек, причем m человек имеют рубли, а k — полтинники (монеты по 50 коп.). Билет в кино стоит 50 коп., и в начале продажи билетов касса пуста. Сколькими способами могут располагаться в очереди люди с рублями и полтинниками так, что очередь пройдет без задержки, т. е. никому не придется ждать сдачу?

Например, если $m = k = 2$, то благоприятными будут лишь два случая: п р п р и п п р р, где буква «п» означает полтинники, а буква «р» — рубли. В четырех же случаях — р р п п, р п р п, р п п р и п р р п возникает задержка — в первых трех случаях уже первый зритель не сможет получить сдачи, а в последнем случае у кассы задержится третий зритель.

При небольших значениях m и k задачу можно решить прямым перебором. Но уже при $m = k = 20$ число перестановок из 20 руб. и 20 полтинников равно $P(20, 20)$, а это число больше ста миллиардов. Здесь уже прямой перебор не поможет.

Итак, нам надо решить такую комбинаторную задачу: *найти число перестановок с повторениями из m рублей и*

k полтинников, таких что для любого r, $1 \leqslant r \leqslant m + k$, число полтинников среди первых r элементов перестановки не меньше числа рублей. Ясно, что искомое число отлично от нуля лишь при условии, что $m \leqslant k$ — иначе полтинников не хватит, чтобы дать сдачу всем владельцам рублей.

Как и во многих комбинаторных задачах, здесь полезно использовать геометрическую иллюстрацию. Возьмем координатную сетку и будем изображать каждую перестановку рублей и полтинников ломаной, соединяющей узлы

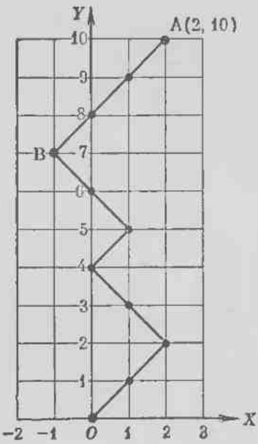


Рис. 36.

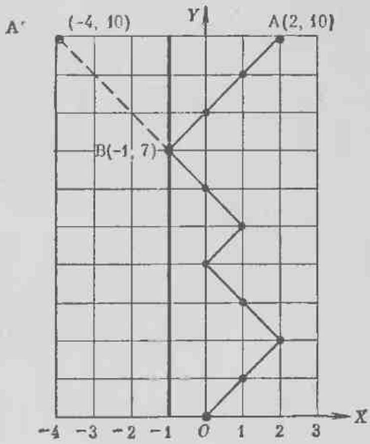


Рис. 37.

сетки по следующему правилу: ломаная начинается в начале координат O (0, 0), и каждому полтиннику соответствует звено ломаной, идущее вверх направо, а каждому рублю — звено, идущее вверх налево (звено соединяет противоположные точки одного из квадратов координатной сетки). Например, последовательности п п р р п р р п п п соответствует ломаная, изображенная на рис. 36.

Ясно, что если в последовательности имеется m рублей и k полтинников, то концом ломаной окажется точка A $(k - m,\ k + m)$. Число ломаных, ведущих из точки O в точку A, равно числу перестановок с повторениями из m рублей и k полтинников, т. е. $P(m, k)$. Выясним теперь, чем характеризуются ломаные, удовлетворяющие условию задачи. Если очередь в какой-то момент времени застопорилась, то это значит, что число рублей перед этим оказалось на 1 больше числа полтинников. Но тогда точка, движущаяся по ломаной, сделает влево на один шаг больше, чем вправо, и окажется на прямой $x = -1$ (для ломаной на рис. 36 на этой прямой лежит точка $B(-1, 7)$; она указывает, что очередь остановится на 7-м шагу). Итак, всем перестановкам, при которых очередь останавливается в какой-то момент, соответствуют ломаные, имеющие точки на прямой $x = -1$. Обратно, если у ломаной есть точка на этой прямой, то очередь остановится.

Мы пришли, таким образом, к следующей геометрической задаче: *найти число ломаных указанного вида, не пересекающих прямую* $x = -1$. Поскольку мы знаем общее число ломаных, то эта задача равносильна задаче об отыскании числа ломаных, пересекающих прямую $x = -1$. Но, если ломаная L пересекает прямую $x = -1$, то ее можно преобразовать следующим образом: взять наивысшую точку пересечения и часть ломаной L выше этой точки симметрично отразить в прямой $x = -1$. Такое преобразование показано на рис. 37. При этом преобразовании точка $A\,(m - k,\ k + m)$ переходит в симметричную ей точку $A'(k - m - 2,\ k + m)$. Таким образом, каждому пути из O в A, пересекающему прямую $x = -1$, соответствует путь из O в A'. Обратно, если ломаная L' ведет из O в A', то она по дороге должна хотя бы один раз пересечь прямую $x = -1$ и, значит, может быть получена описанным выше образом из ломаной, соединяющей O с A и пересекающей указанную прямую. Итак, число ломаных, соединяющих O с A и пересекающих прямую $x = -1$, равно числу ломаных, ведущих из O в A'.

Сосчитать же число ломаных, ведущих из O в A', совсем легко — координаты точки A' равны $k - m - 2$ и $k + m$, а поэтому у такой ломаной должно быть $k + 1$ звеньев, направленных влево и $m - 1$ звеньев, направленных вправо. Значит, общее число этих ломаных равно $P\,(k + 1,\ m - 1)$. Число же ломаных, непересекающих прямую $x = -1$, выражается формулой

$$P(m, k) - P(k + 1, m - 1) = \\ = C_{k+m}^{k} - C_{k+m}^{k+1} = \frac{k - m + 1}{k + 1} C_{m+k}^{m}. \tag{18}$$

Итак, количество очередей, при которых не происходит задержки, равно $\frac{k-m+1}{k+1}C_{m+k}^{m}$ (k — число полтинников, m — число рублей). В частности, если $k = m$, то очередь пройдет без задержки в $\frac{1}{k+1}C_{2k}^{k}$ случаях и задержится в $\frac{k}{k+1}C_{2k}^{k}$ случаях. Отношение числа благоприятных случаев к числу всех случаев уменьшается с ростом k.

Наша задача полностью решена. Рассмотрим теперь другую, весьма близкую к ней задачу. Предположим, что *кассир был предусмотрителен и в начале продажи билетов в кассе уже лежало q полтинников. Во скольких случаях пройдет без задержки очередь, состоящая из m обладателей рублей и k обладателей полтинников?*

Геометрическое представление этой задачи будет почти таким же. Только запретной прямой будет уже прямая $x = -q - 1$ (наличие q полтинников в кассе позволяет ломаной уклониться на q единиц влево без того, чтобы произошла задержка очереди; а уклониться на $q + 1$ единиц она уже не имеет права). Поэтому теперь число неблагоприятных перестановок будет не $P(k + 1, m - 1)$, а $P(k + q + 1, m - q - 1)$, а число благоприятных равно $C_{m+k}^{m} - C_{m+k}^{m-q-1}$.

В процессе прохождения очереди могли быть моменты, когда в кассе не оставалось ни одного полтинника, и очередь не останавливалась лишь потому, что покупавший в этот момент билет был как раз обладателем полтинника. Подсчитаем число расстановок, при которых ни разу не будет такого критического момента. Иными словами, решим такую задачу.

Сколькими способами можно расставить обладателей m рублей и k полтинников так, чтобы в любой момент (исключая, быть может, начальный и конечный) *в кассе был хотя бы один полтинник?*

Эта задача тоже решается методом подсчета ломаных. Но теперь надо искать ломаные, пересекающие прямую $x = 0$ лишь в начале координат и (при $m = k$) в точке $A(0, 2k)$. Поскольку из условия задачи ясно, что впереди должны стоять два обладателя полтинника, то первого из них можно отвести в сторону, и тогда получим решенную выше задачу, но для случая, когда на m рублей приходится $k - 1$ полтинник. Поэтому число благоприятных расстановок при $m < k$ равно $C_{m+k-1}^{m} - C_{m+k-1}^{m-1}$. Если же $m = k$, то надо отвести в сторону и замыкающего очередь обладателя рубля (проверьте сами, что в конце не может находиться обладатель полтинника). Мы получим ответ $\frac{1}{k} C_{2k-2}^{k-1}$.

Обозначим через T_n число $\frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}$, показывающее, во скольких случаях проходит без задержки очередь из обладателей n рублей и n полтинников. Мы докажем сейчас, что эти числа удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$T_n = T_0 T_{n-1} + T_1 T_{n-2} + \dots + T_{n-1} T_0. \qquad (19)$$

Для доказательства разобьем все варианты на классы, отнеся к s-му классу очереди, в которых лишь после того, как пройдут $2s$ покупателей, в первый раз обнаруживают отсутствие в кассе полтинников. В этом случае среди первых $2s$ покупателей имеется s человек с полтинниками и s человек с рублями, а число способов расстановки, при которых в кассе на первых $2s - 1$ шагах был хотя бы один полтинник, равно, как мы видели, $\frac{1}{s} C_{2s-2}^{s-1} = T_{s-1}$. Среди оставшихся $2n - 2s$ людей у $n - s$ рубли и у $n - s$ полтинники. Расставить их так, чтобы очередь и потом прошла благополучно, можно T_{n-s} способами. Всего по правилу произведения получаем, что в s-м классе будет $T_{s-1} T_{n-s}$ расстановок. А так как общее число благополучных расстановок равно T_n, то выполняется равенство (19).

Мы уже сталкивались с равенством (19), решая задачи о разбиении многоугольника на треугольники (стр. 143). Это соотношение встречается и в других задачах. Например, пусть имеется множество X из $n + 1$ предметов, стоящих в определенном порядке. Разобьем это множество X на две непустые части так, чтобы одна из них лежала левее другой. После этого каждую из частей разобьем на две непустые части и т. д. (если какая-нибудь часть состоит уже из одного предмета, она не подвергается дальнейшим разбиениям). Можно доказать, что число B_n таких процессов, заканчивающихся разбиением множества X на $n + 1$ элементов, равно T_n. Доказательство основано на том, что множество разбиений представляют в виде объединения n классов, где в s-й класс попадают разбиения, у которых на первом шаге левое множество состоит из s элементов. Это сразу приводит к рекуррентному соотношению для B_n, совпадающему с соотношением (19) для T_n. Так как, кроме того, $B_0 = T_0 = 1$, то для всех n имеем $B_n = T_n$.

У Шамаханской царицы

Вернемся снова к блужданиям толпы людей по оси, которые мы рассматривали на стр. 93. Только теперь будем считать, что слева от точки O из которой они вышли, про-стираются... владения Шамаханской царицы, сыгравшей столь печальную роль в судьбе незадачливого царя Додона и его сыновей. Как читатель помнит, те, кто попадали в ее царство, обратно уже не возвращались. Мы тоже будем считать, что те, кто попадают на левую половину оси, там и остаются. Требуется выяснить, сколько человек останется у Шамаханской царицы и где окажутся остальные люди через N часов после выхода толпы а 2^N человек из точки O.

Передвижения людей по оси абсцисс можно изобразить такой же ломаной, как и продвижение очереди в кассу. Если в конце движения человек попадает в точку $B_k\,(k-N/2)$ (напомним, что он каждый раз сдвигается на $^1/_2$ единицы длины), то ему придется сделать $N-k$ перемещений влево и k вправо. Но в точку $B_k\,(k-N/2)$ путник попадает лишь при условии, что по дороге он не угодит в Шамаханское царство, т. е. если ни в один момент он не сделает больше передвижений влево, чем вправо. Последнее условие равносильно тому, что ломаная, изображающая движение, не имеет общих точек с прямой $x=-1$. Но это и есть та самая задача, которую мы только что решали. Значит, число людей, попавших в точку $B_k\,(k-N/2)$, не побывав в Шамаханском царстве, равно

$$C_N^k-C_N^{k+1}=\frac{2k-N+1}{k+1}C_N^k.$$

Теперь уже нетрудно подсчитать, сколько человек останется в Шамаханском царстве. Для этого сложим числа $C_N^k-C_N^{k+1}$ от $k=E\,(N/2)+1$ до N. Мы получим число A людей, не попавших в Шамаханское царство. А так как всего из точки O вышли 2^N человек, то во владениях Шамаханской царицы остались 2^N-A человек.

Если бы Шамаханское царство начиналось не слева от точки O, а слева от точки O_1 с абсциссой $-q/2$, то результат получился бы иной: в точке $B_k\left(k-\frac{N}{2}\right)$, $k\geqslant\frac{N-q}{2}$, находилось бы $C_N^k-C_N^{k+q+1}$ человек. Это сразу вытекает из решения задачи на стр. 181, когда в кассе было q полтинников.

В фольклорном варианте задачи, как мы говорили, в точке O находилось питейное заведение. Здесь уже, разумеется, не было никакой Шамаханской царицы, а просто слева от точки O была вырыта канава, куда и попадали неумеренные поклонники Бахуса. Предположим теперь, что вместо канавы в этой точке находилась стена, наткнувшись на которую, приходилось на следующем шагу идти в обратную сторону. Мы предоставляем читателю убедиться, что в этом случае C_N^{k+1} надо не вычитать из C_N^k, а прибавлять к C_N^k. Иными словами, тогда в точке $B_k(k - N/2)$ окажется $C_N^k + C_N^{k+1}$ людей. Аналогично рассматривается случай, когда стена находится в точке $x = -q/2$.

Поглощающая и отражающая стенки

Мы уже говорили на стр. 94, что задачи о случайных блужданиях весьма важны для физики — они являются простейшими моделями диффузии частиц. Задача о Шамаханской царице тоже имеет простое физическое истолкование — просто слева от точки O находится стенка из материала, поглощающего частицы. Если стенка вплотную примыкает к точке O, возникает случай, рассмотренный вначале, а если она отстоит от точки O на $q/2$ единиц длины, то получается задача, в которой владения царицы расположены слева от точки $O_1(-q/2)$. Задача о блуждании подвыпивших людей при наличии стены физически истолковывается как задача о диффузии частиц при наличии отражающей стенки.

В те времена, когда основным практическим применением комбинаторики и теории вероятностей было изучение азартных игр, задача о случайных блужданиях с поглощением формулировалась иначе. Речь шла об «играх на разорение». Представим себе двух игроков, играющих, например, в орлянку. После каждой партии проигравший уплачивает выигравшему рубль. Участник, проигравший все деньги, прекращает игру. Надо было выяснить вероятность различных исходов игры, если у одного игрока было p рублей, а у другого q рублей. Очевидна связь этой задачи с изучением диффузии частиц в области, ограниченной с двух сторон поглощающими стенками.

Задача о двух шеренгах

В комбинаторике часто бывает, что две на первый взгляд весьма далекие друг от друга задачи оказываются по сути дела одинаковыми. Рассмотрим такую задачу.

Имеется $k+m$ (где $k \geqslant m$) человек разного роста. Сколькими способами можно построить их в две шеренги (k человек в первой шеренге и m человек во второй), чтобы в каждой шеренге люди стояли по ранжиру, каждый человек во второй шеренге был ниже стоящего перед ним человека, а шеренги были расположены друг относительно друга так, как показано на рис. 38.

Оказывается, решение этой задачи сводится к уже разобранной задаче об очереди в кассу. Поставим людей требуемым образом и дадим всем, стоящим в первой шеренге,

Рис. 38.

по полтиннику, а всем, стоящим во второй шеренге, по рублю, после чего выстроим всех по ранжиру в одну колонну. Получится очередь из m обладателей рублей и k обладателей полтинников. Из условия задачи сразу следует, что эта очередь пройдет без задержки. В самом деле, пусть кто-то занимает n-е место во второй шеренге. Тогда среди владельцев рублей лишь $n-1$ выше него. А среди владельцев полтинников по крайней мере n человек выше него — стоящий прямо перед ним и $n-1$ стоящих в первой шеренге справа от него. Поэтому, когда он подойдет к кассе, там будет хотя бы один полтинник, и сдача ему обеспечена.

Обратно, пусть задана некоторая расстановка k человек с полтинниками и m человек с рублями, при которой очередь проходит без задержки. Не теряя общности, можно считать, что все $k+m$ человек стоят по ранжиру. Выберем теперь всех обладателей полтинников и поставим их по ранжиру в первую шеренгу, а в затылок к ним поставим по ранжиру обладателей рублей. Предоставляем читателю проверить, что эта расстановка обладает нужными свойствами. Значит, число возможных расстановок людей в две шеренги равно числу очередей, при которых не будет задержки.

Схема на рис. 38 является не чем иным, как диаграммой Юнга, состоящей из двух горизонталей. Если перенумеровать всех поставленных людей по ранжиру, то числа в диаграмме будут убывать слева направо и сверху вниз. Обобщая решенную задачу, приходим к следующей постановке вопроса.

Дана диаграмма Юнга с m горизонталями, причем первая горизонталь состоит из n_1 полей, вторая из n_2 полей,..., m-я из n_m полей, $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_m$. Сколькими способами можно поставить на этой диаграмме числа 1, 2, ..., n, где $n = n_1 + \ldots + n_m$, так, чтобы эти числа убывали вдоль каждой горизонтали слева направо, а вдоль каждой вертикали сверху вниз?

Решение этой задачи, играющей важную роль во многих областях математики, довольно сложно. Ответ дается формулой

$$\frac{n!}{l_1! \ldots l_m!} \prod_{i<j} (l_i - l_j),$$

где $l_i = n_i + m - i$; $i, j = 1, \ldots, m$.

Задачи к главе V

1. На собрании должны выступить пять человек A, B, C, D и E. Сколькими способами можно расположить их в списке ораторов при условии, что B не должен выступать до тех пор, пока не выступит A? Решите ту же задачу при условии, что A должен выступить непосредственно перед B.

2. На полке находятся $m + n$ различных книг, из которых m в черных переплетах, а n в красных. Сколько существует перестановок этих книг, при которых книги в черных переплетах занимают первые m мест? Во скольких случаях все книги в черных переплетах стоят рядом?

3. Сколькими способами можно переставить буквы слова «Юпитер» так, чтобы гласные шли в алфавитном порядке?

4. Сколькими способами можно переставить буквы слова «перешеек» так, чтобы четыре буквы «е» не шли подряд?

5. Сколькими способами можно переставить буквы слова «опоссум» так, чтобы буква «п» шла непосредственно после буквы «о».

6. Сколькими способами можно переставить буквы слова «обороноспособность» так, чтобы две буквы «о» не шли подряд?

7. Сколькими способами можно переставить буквы слова «каракули» так, чтобы никакие две гласные не стояли рядом?

8. Сколькими способами можно переставлять буквы в слове «фацетия» так, чтобы не менялся порядок гласных букв? Решите ту же задачу для слова «параллелизм».

9. Сколькими способами можно переставить буквы слова «пастух» так, чтобы между двумя гласными были две согласные буквы?

10. Сколькими способами можно переставлять буквы слова «логарифм» так, чтобы второе, четвертое и шестое места были заняты согласными буквами?

11. Сколькими способами можно переставить буквы слова «огород» так, чтобы три буквы «о» не стояли рядом? Решите ту же задачу, если запрещается, чтобы две буквы «о» стояли рядом.

12. Сколькими способами можно переставить буквы в слове «космос» так, чтобы две одинаковые буквы не стояли рядом? Решите ту же задачу для слова «тартар».

13. Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр числа 1 233 145 254 так, чтобы две одинаковые цифры не стояли рядом?

14. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр числа 12 312 343 так, чтобы три цифры 3 не шли друг за другом?

15. Сколькими способами можно переставить цифры числа 12 341 234 так, чтобы никакие две одинаковые цифры не шли друг за другом? Решите ту же задачу для числа 12 345 254.

16. Сколькими способами можно переставить цифры числа 1 234 114 546 так, чтобы три одинаковые цифры не шли друг за другом? Сколькими способами это можно сделать так, чтобы никакие две одинаковые цифры не шли друг за другом?

17. В ряд расположены n предметов. Сколькими способами можно выбрать из них три предмета так, чтобы не брать двух рядом стоящих предметов?

18. Сколькими способами можно расставить 20 белых шашек на шахматной доске так, чтобы это расположение переходило само в себя при вращениях доски на 90°?

19. Сколькими способами можно расставить 20 белых шашек на шахматной доске так, чтобы это расположение было симметричным относительно центральной точки доски? Решите ту же задачу при условии, что шашки ставятся лишь на черные поля.

20. Сколькими способами можно расставить 12 белых и 12 черных шашек на черные поля доски так, чтобы это положение было симметрично относительно центра доски? Решите ту же задачу, если при симметрии меняются цвета шашек.

21. Сколькими способами можно поставить 20 белых шашек на крайние поля шахматной доски так, чтобы это расположение не менялось при повороте доски на 90°?

22. Сколькими способами можно расставить 20 белых шашек на крайних линиях шахматной доски так, чтобы на противоположных сторонах доски шашки стояли симметрично относительно линий, делящих доску пополам?

23. Сколькими способами можно посадить рядом 3 англичан, 3 французов и 3 турок так, чтобы никакие 3 соотечественника не сидели рядом?

24. Сколькими способами можно посадить за один круглый стол 3 англичан, 3 французов и 3 турок так, чтобы никакие два соотечественника не сидели рядом?

25. Сколькими способами можно расставить в ряд 6 англичан, 7 французов и 10 турок так, чтобы каждый англичанин стоял между французом и турком, но никакие француз и турок не стояли рядом? Решите ту же задачу для 5 англичан, 7 французов и 10 турок.

26. Сколько можно составить сочетаний из 20 букв по 6 так, чтобы в каждом сочетании никакая буква не входила более двух раз?

27. Имеется $p + q + r$ букв: p букв α, q букв β и r букв γ. Сколько существует перестановок таких букв, при которых буква α встречается раньше, чем β, а β — раньше, чем γ?

28. Некоторый алфавит состоит из шести букв, закодированных кортежами длины 1 и 2 из точек и тире. При передаче одного слова не сделали промежутков, отделяющих букв друг от друга. Сколькими способами можно прочитать это слово, если в него вошло n точек и тире?

29. Линия в 30 *см* закрашивается в следующем порядке: красный, белый, синий, красный, белый, синий и т. д., причем первым

идет красный цвет, а последним — синий. Каждый цвет занимает всего 10 *см*, длины полос не менее 2 *см*, причем все эти длины — целые числа. Сколько возможно способов такой раскраски? Сколько существует способов такой раскраски, если последним цветом может быть любой? Докажите, что если длины всех полос не менее 3 *см*, то в 153 случаях последним будет синий цвет, в 71 — белый и в 81 — красный.

30. Буквы, входящие в выражение $\alpha^2\beta^2\gamma^2$, переставляются всеми способами, при которых рядом с каждой буквой стоит слева или справа такая же буква. Докажите, что число таких перестановок равно 6. Для $\alpha^3\beta^3\gamma^3$ тоже 6 таких перестановок, для $\alpha^4\beta^4\gamma^4$ — 90 и для $\alpha^5\beta^5\gamma^5$ — 426.

31. В шахматной олимпиаде участвуют представители n стран по 4 представителя от каждой страны. Сколькими способами их можно построить в шеренгу так, чтобы рядом с каждым был представитель той же страны?

32. m французов и n англичан построены в шеренгу так, что рядом с каждым стоит хотя бы один его соотечественник. Покажите, что число таких расстановок равно

$$m!n!\,[1 + (C_{m-2}^0 + C_{m-3}^1)(C_{n-2}^0 + C_{n-3}^1) + \\ + (C_{m-3}^1 + C_{m-4}^2)(C_{n-3}^1 + C_{n-4}^2) + \cdots].$$

33. Рассматриваются все кортежи длины k, составленные без повторений из чисел $1, 2, \ldots, n$; в этих кортежах четные числа стоят на местах с четными номерами, а нечетные — на местах с нечетными номерами. Сколько таких кортежей расположено в порядке возрастания чисел?

34. Сколькими способами можно построить в шеренгу n супружеских пар так, чтобы ни одна пара не стояла рядом? Сколькими способами их можно расставить так, чтобы рядом стояли ровно r пар?

35. Даны n наборов, в каждый из которых входит q одинаковых элементов, причем элементы различных наборов различны. Во скольких перестановках этих nq элементов нет идущих подряд одинаковых элементов? Решите ту же задачу при условии, что элементы располагаются по окружности.

36. На книжной полке стоит n книг. Сколькими способами можно выбрать из них p книг так, чтобы между любыми двумя выбранными книгами, равно как и после p-й выбранной книги, было не менее s книг?

37. Сколько существует треугольников, вершины которых совпадают с вершинами данного выпуклого многоугольника, но стороны не совпадают со сторонами этого многоугольника?

38. Сколько можно сделать перестановок из n элементов, в которых никакие два из заданных k элементов не стоят рядом? Во скольких перестановках никакие 3 из заданных k элементов не стоят рядом?

39. Найдите число выпуклых k-угольников, вершинами которых служат k из n вершин выпуклого n-угольника, причем две соседние вершины k-угольника разделяются по меньшей мере s вершинами n-угольника.

40. Сколькими способами можно поставить на $(m \times n)$-доску k ладей так, чтобы на каждой крайней линии доски стояла одна ладья и они не били друг друга? Хотя бы одна ладья?

41. Окна дома, обращенные к морю, расположены в вершинах прямоугольной сетки с m горизонталями (этажами) и n вертикалями. Сколько сигналов можно передать находящемуся в море кораблю, освещая некоторые из окон дома, если в темноте нельзя различить положение освещенных окон относительно дома?

42. Во скольких кортежах из m единиц и k нулей кортеж 0101 впервые встречается на r-м месте (т. е. занимает места с номерами $r, r+1, r+2, r+3$). Решите ту же задачу для кортежа 00100.

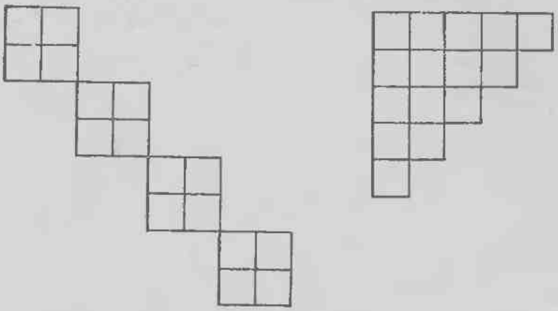


Рис. 39.

43. Во скольких кортежах из m единиц и k нулей кортеж 00100 встречается дважды?

44. Найдите ладейные многочлены для досок, изображенных на рис. 39.

45. Сколькими способами можно бросить 6 раз две игральные кости так, чтобы каждая кость выпала всеми 6 сторонами, но ни разу не встретились комбинации (2, 1), (3, 2), (2, 3), (4, 4), (4, 5) и (6, 6).

46. Назовем подъемом в перестановке n чисел $1, 2, \ldots, n$ пару соседних чисел (i, j) таких, что $i < j$. Найдите количество перестановок, имеющих r подъемов.

47. Из колоды, содержащей 52 карты, извлекают 6 карт. Во скольких случаях среди них одна пара одинаковых карт разной масти, две пары, три пары?

48. Из n солдат различного роста выбирают два отряда, содержащих соответственно k_1 и k_2 солдат. Сколькими способами можно сделать этот выбор так, чтобы любой солдат первого отряда был ниже любого солдата второго отряда?

49. Найдите число кортежей длины k, составленных из чисел $1, 2, \ldots, n$, таких, что любые две соседние координаты отличаются не более чем на 1.

50. Сколько существует кортежей длины n из цифр 0, 1 и 2, в которых нет соседних цифр 0?

51. Во скольких кортежах длины n из цифр 0 и 1 дважды встречается кортеж 1 1 1 (два вхождения кортежа не должны пересекаться)? Во скольких таких кортежах встречается кортеж 0101? Во

скольких есть лишь одна пара соседних нулей? Решите те же задачи для кортежей из m единиц и k нулей.

52. Во скольких кортежах длины n, составленных из цифр 0, 1, 2, 3, хотя бы один раз встречается каждая из цифр 1, 2, 3?

53. Сколько кортежей длины n из цифр 0 и 1 содержат четное число нулей?

54. Во скольких перестановках букв a, b, c, d, e, f нет кортежей abc и df?

55. Во скольких перестановках букв α, α, α, α, β, β, β, γ, γ не встречается ни один из блоков $\alpha\alpha\alpha\alpha$, $\beta\beta\beta$, $\gamma\gamma$?

56. Во скольких перестановках букв α, α, β, β, γ, γ ни одна буква не совпадает со стоящей на том же месте буквой в перестановке $\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma$?

57. Во скольких перестановках 33 букв русского алфавита нет ни одного из имен: Лев, Марк, Тоня?

Глава VI

КОМБИНАТОРИКА ОРБИТ

Преобразования и орбиты

Мы уже говорили (см. стр. 42), что существует 92 расположения восьми ферзей на шахматной доске, при которых ни один из них не может взять другого. Если найдено одно из таких расположений, то легко получить еще несколько расположений с тем же свойством — достаточно повернуть доску на 90, 180, 270° или отразить ее в одной из главных диагоналей, либо в одной из линий, делящих доску пополам. При любом из этих преобразований ферзи, стоявшие на разных горизонталях, вертикалях и диагоналях, сохранят то же свойство.

Таким образом, множество всех 92 расположений ферзей распадается на классы эквивалентности, состоящие из расположений, которые переводятся друг в друга указанными преобразованиями. Эти классы эквивалентности по-другому называются *орбитами*. Вообще говоря, каждая орбита состоит из 8 расположений ферзей — ведь мы указали 7 преобразований, которые можно применить к заданному расположению, чтобы получить из него новые. Но иногда расположение оказывается устойчивым и переходит при некоторых преобразованиях само в себя. Тогда получится орбита из меньшего числа расположений. Проверка показывает, что 11 орбит состоят из 8 расположений ферзей, а одна орбита — из 4 расположений — при поворотах на 180° расположения, входящие в эту орбиту, переходят сами в себя.

Чтобы получить полный список расположений, достаточно указать по одному расположению в каждой орбите, или, как говорят, сделать *сечение орбит*. В качестве такого списка можно выбрать следующий: 72631485, 61528374, 58417263, 35841726, 46152837, 57263148, 16837425, 57263184, 48157263, 51468273, 42751863, 35281746 (здесь указаны номера горизонталей занятых полей в 1-й, 2-й, ..., 8-й вертикалях).

Рассмотренная сейчас задача связана с общей задачей об орбитах в множестве относительно некоторой совокупности преобразований. *Преобразованием* множества X называется отображение, при котором каждому элементу x из X соответствует один и только один элемент y того же множества X — *образ элемента* x при этом преобразовании, причем любой элемент y из X является образом одного и только одного элемента. Образ элемента $x \in X$ при преобразовании f обозначают $f(x)$. Если G — некоторая совокупность преобразований множества X, то *орбитой элемента* x относительно этой совокупности называют множество образов x при всех преобразованиях из G. При некоторых условиях (мы их выясним ниже) все множество X распадается на орбиты своих элементов, и задача состоит в том, чтобы найти число таких орбит. Ответ, разумеется, зависит не только от множества X, но и от совокупности преобразований G.

Хоровод

Шесть девушек водят хоровод. Требуется найти число взаимных расположений танцующих.

Сначала укажем на окружности 6 равноудаленных точек и поставим на каждую точку одну из танцующих. Это можно сделать $6! = 720$ способами. Если переместить всех девушек по кругу, то их положение изменится, но взаимное расположение останется тем же самым. Таким образом, множество X всех расстановок танцующих распадается на классы эквивалентности, причем в один и тот же класс попадают расстановки, получающиеся друг из друга вращением по кругу. Очевидно, что каждый класс содержит по 6 расстановок — из данного расположения танцующих можно получить еще 5, сделав повороты на 60, 120, 180, 240 и 300°. Итак, множество всех 720 расстановок распадается на классы, состоящие из 6 расстановок. Поэтому число различных классов равно $720 : 6 = 120$.

Точно так же убеждаемся, что n различных предметов имеют $n! : n = (n-1)!$ различных круговых расположений.

Сосчитаем теперь, *сколько различных ожерелий можно составить из 6 различных бусин.* По аналогии с только что решенной задачей можно предположить, что ответом будет $(6-1)! = 5! = 120$. Но ожерелье можно не только повернуть, но и перевернуть на другую сторону. Поэтому классы эквивалентности состоят уже не из 6, а из 12 расстановок бусин и число таких классов равно $720 : 12 = 60$.

Вообще *если имеется n различных предметов, располагаемых по кругу, причем два расположения, переводимые друг в друга вращением или переворачиванием круга, считаются эквивалентными, то число классов эквивалентности (орбит) равно* $(n-1)! : 2$.

Раскраска куба

Имеется 6 различных красок: белая, черная, красная, желтая, зеленая и синяя. Скольким и геометрически различными способами можно раскрасить ими куб в 6 цветов?

В этой задаче два способа раскраски куба считаются геометрически одинаковыми, если невозможно различить два раскрашенных куба после того, как их бросили в мешок и перемешали там. Иными словами, два способа раскраски геометрически одинаковы, если они могут быть переведены друг в друга движением куба.

Узнаем сначала, сколько способов раскраски куба геометрически неотличимы от данного. Пусть куб раскрашен каким-то образом. Грань, окрашенную в белый цвет, можно или оставить на месте, или перевести в любую из остальных 5 граней. Всего получается выбор из 6 возможностей. Если этот выбор уже произведен, то существуют 4 самосовмещения куба, при которых белая грань сохраняет выбранное положение: куб можно вращать на углы 0, 90, 180 и 270° вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно к выбранной грани. По правилу произведения получаем, что каждый класс геометрически одинаковых раскрасок куба насчитывает $6 \cdot 4 = 24$ способа раскраски. А так как общее число способов покрасить 6 граней куба в 6 цветов равно $6! = 720$, то число геометрически различных способов равно $720 : 24 = 30$. Итак, куб можно раскрасить 30 геометрически различными способами.

Во всех трех решенных в этой главе задачах: о хороводе, об ожерелье и о раскраске куба речь шла о некоторых множествах, преобразованиях этих множеств и орбитах относительно этих преобразований. В задаче о хороводе X было множеством различных расстановок танцующих по кругу. Преобразованиями данной расстановки являлись ее вращения, а орбитами — совокупности перестановок, получаемых из данной с помощью вращений. В задаче об ожерелье к поворотам присоединялось переворачивание ожерелья, благодаря чему произошло слияние орбит (вообще чем больше мы берем преобразований, тем больше становится элементов в орбитах). А в задаче о раскраске куба элементами множества X были различные способы раскраски, а преобразованиями — вращения куба, переводившие один способ раскраски в другой.

Во всех этих примерах была одна общая черта — в каждом из них орбиты состояли из одного и того же числа элементов (6 в первом примере, 12 во втором и 24 в третьем). Так бывает не всегда. Уже при расстановке ферзей оказалось, что 11 орбит содержали по 8 расстановок, а одна — лишь 4 расстановки. Это было связано с добавочной симметрией последней расстановки — она переходила сама в себя при центральной симметрии.

Чтобы лучше разобраться в ситуации, рассмотрим еще один пример, а именно, найдем, *сколькими геометрически различными способами можно раскрасить вершины квадрата в белый и черный цвета*. При этом два способа считаются геометрически одинаковыми, если они могут быть получены друг из друга вращениями квадрата вокруг центра.

Ясно, что два геометрически одинаковых способа раскраски имеют равное количество белых и равное количество черных вершин. Случай, когда все вершины белые, совсем прост — есть лишь один способ раскраски. Почти столь же прост случай, когда одна из вершин черная, а три — белые. Здесь есть 4 способа раскраски, но все они геометрически одинаковы (рис. 40). Еще два способа раскраски получаем, если покрасим все вершины в черный цвет, или 3 вершины в черный, а одну в белый.

Нам осталось разобрать случай, когда две вершины белые, а две — черные. Общее число таких способов раскраски равно 6 (рис. 41). Они распадаются на два класса — 4 способа, при которых одноцветные вершины находятся на одной стороне квадрата, и 2 способа, при которых такие вершины являются концами диагонали. Легко видеть, что как первые 4 способа, так и вторые 2 способа раскраски геометрически эквивалентны, а потому имеем всего два класса эквивалентности. Всего получается 6 геометрически различных способа раскраски квадрата.

Как и в случае расстановки ферзей, причина, по которой один способ раскраски дал вдвое меньше элементов

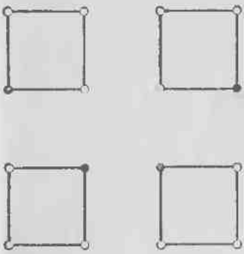


Рис. 40.

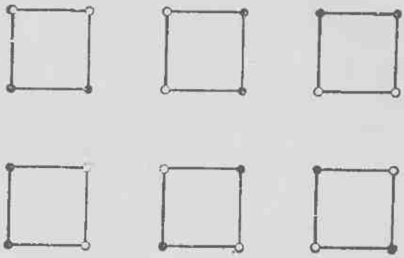


Рис. 41.

орбиты, чем другой, заключается в его симметричности. Если покрасить в белый цвет две соседние вершины, то все 4 вращения квадрата вокруг центра дают новые способы раскраски. Если же покрасить в белый цвет противоположные вершины квадрата, то при вращении на 180° этот способ раскраски переходит сам в себя.

Орбиты и группы преобразований

Ключом, позволяющим математике решать самые различные проблемы, вскрывая их общие черты и устраняя все лишнее и случайное, является метод построения математических моделей. Чтобы построить математическую модель, которая годилась бы во всех рассмотренных выше задачах, попробуем сначала выяснить, какой должна быть совокупность G преобразований множества X для того, чтобы оно распалось на непересекающиеся орбиты. Для этого введем для элементов множества X такое взаимное отношение: «элемент y может быть получен из элемента x

с помощью преобразования из множества G». Мы уже знаем (см. стр. 128), что если это отношение окажется рефлексивным, симметричным и транзитивным, то оно будет отношением эквивалентности, а тогда все множество X распадется на классы эквивалентности по этому отношению. Это и будет искомым разбиением на орбиты.

Рефлексивность введенного отношения означает попросту, что каждый элемент x из X должен получаться сам из себя при некотором преобразовании, принадлежащем совокупности G. Это проще всего обеспечить, потребовав, чтобы G содержало *тождественное преобразование* e, т. е. преобразование, при котором все элементы из X остаются на месте. Симметричность того же отношения означает, что если элемент y получается из элемента x каким-то преобразованием из G, то x, в свою очередь, должен получаться из y с помощью, быть может, иного преобразования из G. Добиться этого тоже несложно. Достаточно потребовать, чтобы вместе с каждым преобразованием f совокупность G содержала обратное преобразование f^{-1}, которое определяется так: если f переводит x в y, то f^{-1} переводит y обратно в x.

Теперь осталось обеспечить транзитивность рассматриваемого отношения. Она означает, что если в G есть преобразование f, переводящее какой-то элемент x в y и преобразование g, переводящее y в z, то в G должно быть и преобразование, переводящее x непосредственно в z. Для этого достаточно, чтобы G вместе с f и g содержало их композицию, т. е. преобразование $h = g \circ f$, определяемое так: для всех $x \in X$ имеем $h(x) = g[f(x)]$.

Итак, для того чтобы совокупность преобразований G множества X определяла разбиение этого множества на орбиты, достаточно, чтобы выполнялись следующие три условия:

а) G содержит тождественное преобразование e;

б) вместе с каждым преобразованием f совокупность G содержит обратное преобразование f^{-1};

в) вместе с любыми двумя преобразованиями f и g совокупность G содержит их композицию $g \circ f$.

В математике принято называть совокупность преобразований, обладающую указанными тремя свойствами, *группой преобразований множества* X. Итак, в дальнейшем мы будем рассматривать не просто любые совокупности преобразований множества X, а лишь группы преобразований, т. е. требовать выполнения свойств а), б) и в). Тогда можно быть уверенным, что X распадается на непересекающиеся орбиты относительно этой группы.

Неподвижные элементы

Итак, первый шаг сделан — построена математическая модель всех рассматривавшихся выше задач: имеется множество X и группа G преобразований этого множества. Требуется найти число орбит в X при действии группы G. Эта модель охватывает и многие задачи, о которых рассказывалось ранее, в частности, подсчет числа перестановок с повторениями (в этом случае X состоит из всех перестановок $n = n_1 + \ldots + n_k$ элементов, а G — из преобразований, сводящихся к взаимному перемещению «одноцветных» элементов).

Если g — какое-то преобразование множества X, то может случиться, что некоторые элементы этого множества остаются при этом преобразовании неподвижными. Например, если X — множество граней куба, а g — вращение куба на 90, 180 или 270° вокруг оси, перпендикулярной к грани a и проходящей через центр куба, то сама грань a и противоположная ей грань b переходят сами в себя. Мы будем обозначать через $\psi(g)$ число элементов из X, остающихся неподвижными при преобразовании g. В рассмотренном случае $\psi(g) = 2$ (в себя перешли две грани). Для тождественного преобразования куба имеем $\psi(e) = 6$ (все 6 граней переходят в себя), а для вращения куба вокруг диагонали на 120 или 240° имеем $\psi(g) = 0$ (ни одна грань не перешла в себя). Имеем $\psi(g) = 0$ и для вращения куба вокруг оси, проходящей через середины противоположных ребер. Общее число неподвижных элементов для всех элементов группы G вращений куба легко подсчитать: $6 + 3 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ (вокруг каждой из 3 осей, перпендикулярных к граням, можно сделать 3 вращения, отличные от тождественного, а при каждом из них имеем 2 грани, переходящие в себя). Но тому же числу 24 равно и количество элементов в группе. Нет ли здесь общей закономерности: общее число неподвижных элементов для всех элементов группы G преобразований множества X равно числу элементов этой группы?

Сделаем контрольный эксперимент, взяв не все вращения куба, а лишь вращения на 0, 90, 180 и 270° вокруг оси, перпендикулярной к одной из граней куба, а в роли X оставим множество, состоящее из 6 граней куба. Эти 4 вращения тоже образуют группу. Мы уже знаем, что $\psi(e) = 6$, а для остальных 3 элементов имеем $\psi(g) = 2$. Поэтому общее число неподвижных элементов равно $6 + 3 \cdot 2 = 12$, в то время как в группе всего 4 элемента.

Эксперимент показал, что дело обстоит несколько сложнее, чем мы думали — в данном случае число неподвижных точек оказалось втрое больше, чем число элементов группы. Простое наблюдение вскрывает роль числа 3 — при вращениях вокруг оси все множество граней распадается именно на 3 орбиты — 2 орбиты состоят из одной грани каждая (это грани, к которым перпендикулярна ось вращений и которые переходят при всех вращениях сами в себя), а одна орбита — из 4 граней, параллельных оси вращения, которые переходят при всех вращениях друг в друга.

Теперь можно уточнить гипотезу: *если разделить сумму чисел неподвижных точек для всех элементов группы преобразований G множества X на число $n(G)$ элементов группы, то получится число $O(X)$ орбит*:

$$O(X) = \frac{1}{n(G)} \sum_{g \in G} \psi(g). \qquad (1)$$

Равенство (1) не противоречит первому из рассмотренных примеров — в этом примере можно было перевести вращением любую грань в любую другую и потому число орбит равнялось 1; тогда, $\sum_{g \in G} \psi(g) = n(G)$.

Равенство (1), верное для любой группы преобразований произвольного конечного множества X, доказал английский математик Бернсайд.

Особенно простой вид принимает формула Бернсайда, если ни одно из преобразований группы, кроме тождественного, не имеет неподвижных элементов. В этом случае $\sum_{g \in G} \psi(g) = n(X)$, где $n(X)$ — число элементов множества X.

Например, такой случай встретился нам при решении задачи о хороводе. Множество X состояло из 720 способов перестановки, а группа G из 6 вращений по кругу, переводивших одну перестановку танцующих в другую. Кроме тождественного преобразования каждое вращение меняло перестановки. Поэтому мы и получили ответ $720 : 6 = 120$.

Черно-белый куб

Найдем, *сколькими геометрически различными способами можно покрасить вершины куба в белый и черный цвета так, чтобы получились 4 белые и 4 черные вершины*. В этом случае группа G состоит из тех же 24 вращений куба, а X из 8 элементов — 8 вершин куба. Подсчет числа неподвижных элементов будем вести отдельно для каждого вида вращений.

Начнем с вращений на 90° вокруг оси, перпендикулярной к грани куба. Легко видеть, что для каждого из таких вращений есть лишь два способа раскраски, остающихся неизменными — либо покрасить все вершины одной грани, перпендикулярной к оси, в белый цвет, а вершины параллельной ей грани в черный цвет, либо поменять эти грани ролями. Так как число осей такого вида равно 3, а вращения на 90 и 270° отличаются лишь направлением, то получаем $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ инвариантных способов раскраски.

Эти же два способа раскраски остаются инвариантными при вращениях на 180° вокруг оси, перпендикулярной к грани. Но кроме них остаются инвариантными еще 4 способа раскраски, при которых противоположные вершины граней, перпендикулярных к оси, окрашиваются в один и тот же цвет — две пары в белый, а две пары в черный. Всего для каждой оси находим 6 инвариантных способов раскраски, а для 3 осей — 18 способов.

По 6 способов инвариантной раскраски находим и для каждого из 6 вращений на 180° вокруг осей, проходящих через середины противоположных ребер. Это дает еще 36 способов. Далее, рассмотрим вращения на 120 и 240° вокруг каждой из 4 диагоналей куба. Для каждого из таких вращений найдется по 4 инвариантных окраски (красим в разные цвета концы диагонали, а затем в разные цвета тройки вершин, соседних с этими концами). Так как у куба 4 диагонали, а вокруг каждой из них можно вращать и на 120 и на 240°, то получаем еще $4 \cdot 4 \cdot 2 = 32$ способа инвариантных раскрасок. Наконец, число инвариантных раскрасок для тождественного вращения равно общему числу способов раскраски 8 вершин так, чтобы 4 стали белыми, а 4 — черными. Но число таких способов равно $P(4, 4)$, т. е. 70. Суммируя по всем вращениям куба, получаем

$$\sum_{g \in G} \psi(g) = 12 + 18 + 36 + 32 + 70 = 168. \tag{2}$$

А так как число элементов в группе равно 24, то число

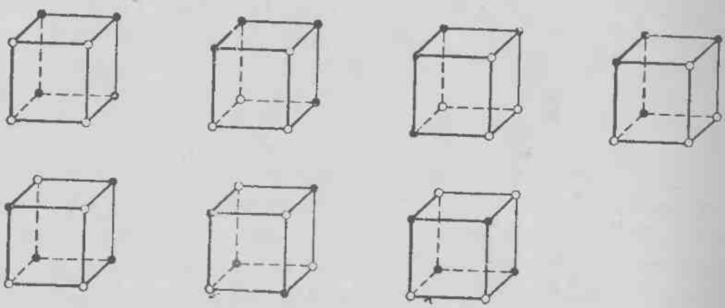


Рис. 42.

геометрически различных способов раскраски равно $168 : 24 = 7$.

Эти 7 способов показаны на рис. 42.

Сопряжение и циклы

Решая задачу о черно-белом кубе, мы объединяли «аналогичные» вращения (например, все вращения вокруг диагоналей), подсчитывали число инвариантных раскрасок для одного вращения и умножали на число вращений, аналогичных данному. Уточним несколько расплывчатое понятие «аналогичных» вращений. Возьмем, например, вращения куба вокруг диагоналей AC' и BD' (рис. 43). Если сделать поворот h куба на 90° вокруг вертикальной оси, то диагональ AC' перейдет в диагональ BD'. Сделаем после этого вращение g куба на 120° вокруг диагонали BD' и обратный поворот h^{-1} на 90° вокруг вертикальной оси. После этих трех преобразований, которые можно записать в виде $h^{-1}\circ g\circ h$, диагональ AC' встанет на место, но весь куб повернется вокруг этой диагонали. Иными словами, применение вращений h и h^{-1} позволило нам превратить вращение вокруг диагонали BD' во вращение вокруг диагонали AC'. Говорят, что эти вращения *сопряжены* друг другу.

Вообще пусть G — группа преобразований множества X. Два преобразования g и g_1 называются *сопряженными*,

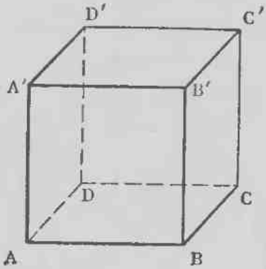


Рис. 43.

если найдется такое преобразование $h \in G$, что $g_1 = h^{-1}\circ g\circ h$. Несложно показать, что в этом случае $\psi(g) = \psi(g_1)$. Иными словами, функция $\psi(g)$ постоянна на всем классе сопряженных друг другу преобразований. Это позволяет переписать формулу Бернсайда в следующем виде:

$$O(X) = \sum_i \frac{\chi_i\psi_i}{n(G)}, \tag{3}$$

где χ_i — число элементов в i-м классе сопряженных элементов, ψ_i — значение $\psi(g)$ на этом классе, а суммирование ведется по всем классам. Например, группа вращений куба состоит из 5 классов сопряженных элементов. Одним из них является тождественное вращение, второй состоит из вращений на 90 и 270° вокруг осей, перпендикулярных к граням, третий — из вращений на 180° вокруг тех же осей, четвертый — из вращений на 120 и 240° вокруг диагоналей и пятый — из вращений на 180° вокруг осей, проходящих через середины противоположных сторон. Именно поэтому в равенстве (2) было 5 слагаемых.

В некоторых случаях бывает удобно вложить группу G в более широкую группу преобразований G_1 того же множества X и рассматривать сопряжения элементов в группе G_1.

В заключение остановимся на подсчете числа инвариантных раскрасок для заданного вращения. Мы делали его непосредственно. Но можно поступить и иначе. Возьмем какое-нибудь преобразование g множества X и элемент x этого множества. Применяя несколько раз подряд преобразование g, получим элементы x, gx, g^2x. ..., g^nx, ... из X. Если множество X конечно, то через несколько шагов цикл преобразований замкнется и мы получим, что, например, $g^kx = x$. Применяя по очереди то же самое преобразование g к другим элементам множества X, получим разложение этого множества на циклы, состоящие из элементов, переходящих по очереди друг в друга при применении преобразования g. Например, если множество X состоит из 8 вершин куба, а g — вращение вокруг диагонали AC' (рис. 43), то имеем 4 цикла: два содержат по одному элементу и состоят из концов диагонали, а два — по 3 элемента, причем один состоит из вершин A', B, D, а второй — из вершин C, B', D'. В этом случае говорят, что вращение g имеет цикловую структуру 1^23^2. Вообще запись цикловой структуры $1^{m_1}2^{m_2}\ldots k^{m_k}$ означает, что имеется m_1 циклов из одного элемента, m_2 циклов из двух элементов, ..., m_k циклов из k элементов. Разумеется,

$$m_1 + 2m_2 + \ldots + km_k = n(X),$$

где $n(X)$ — число элементов множества X. Сопряженные элементы группы имеют одинаковую цикловую структуру. Вместо записи $1^{m_1}2^{m_2}\ldots k^{m_k}$ пишут также одночлен $t_1^{m_1}\ldots t_k^{m_k}$. Это позволяет записать цикловую структуру всей группы преобразований в виде многочлена

$$\sum a_{m_1\ldots m_k} t_1^{m_1}\ldots t_k^{m_k}.$$

Через $a_{m_1\ldots m_k}$ здесь обозначено число элементов группы, для которых цикловая структура равна $1^{m_1}2^{m_2}\ldots k^{m_k}$.

Например, если X — множество вершин куба, а G — группа вращений куба, то этот многочлен имеет вид

$$t_1^8 + 9t_2^4 + 6t_4^2 + 8t_1^2t_3^2.$$

Слагаемое t_1^8 отвечает тождественному преобразованию, для которого вершины распадаются на 8 циклов длины 1. Слагаемое $9t_2^4$ отвечает вращениям двух видов — на 180° вокруг осей, перпендикулярных к граням, и на 180° вокруг, осей, соединяющих середины противоположных ребер. Слагаемое $6t_4^2$ получается из вращений на 90 и 270° вокруг осей, перпендикулярных к граням, а $8\, t_1^2 t_3^2$ — из вращений вокруг диагоналей на 120 и 240° (в последнем случае две точки стоят на месте, что дает два цикла длины 1, а 6 вершин разбиваются на 2 цикла длины 3).

Пусть задана цикловая структура $t_1^{m_1} \ldots t_k^{m_k}$ элемента g группы G, и пусть элементы множества X раскрашиваются в r различных красок. Ясно, что инвариантным относительно элемента g может быть лишь раскрашивание, при котором все элементы одного и того же цикла получают одинаковый цвет. Поэтому число различных раскрасок, инвариантных относительно g, равно числу распределений $m_1 + \ldots + m_k$ циклов по r «ящикам». Такие задачи рассматривались в главе IV. Если задано число элементов, получающих данную краску, то распределение должно быть таким, чтобы в каждом ящике лежало заданное число элементов. Например, если цикловая структура элемента g имеет вид $t_1^2 t_2^4$, и у нас есть две краски, причем в первую надо окрасить 6 элементов, а во вторую — 4 элемента, то возможны такие варианты: в первый цвет окрашиваются или 3 цикла длины 2 (это можно сделать $C_4^3 = 4$ способами) или два цикла длины 1 и два цикла длины 2 (это можно сделать $C_4^2 = 6$ способами). Всего получаем 10 способов раскраски, инвариантных относительно G.

Опишем теперь общий план подсчета орбит для случая, когда задана группа преобразований G множества X и задано r красок, в которые могут окрашиваться элементы из X. Орбиты берутся в множестве всех раскрасок X этими красками (преобразования группы G переводят один способ раскраски в другой).

1. *Для всех элементов группы G находят цикловые индексы* (сопряженные элементы имеют одинаковые цикловые индексы).

2. *Для каждого вида цикловых индексов находят число способов окраски циклов, удовлетворяющих заданным условиям.*

3. *По формуле Бернсайда вычисляют количество орбит.* Живущий в США венгерский математик Пойя разработал алгебраический алгоритм для выполнения этих процессов. Ранее в иной форме этот же алгоритм нашел английский математик Редфилд.

Задачи к главе VI

1. Квадратная доска со стороной в n клеток раскрашивается в черный и белый цвета так, что каждая горизонталь и каждая вертикаль содержат ровно две черные клетки. Два способа раскраски считаются эквивалентными, если их можно перевести друг в друга с помощью перестановок горизонталей и вертикалей. Сколько существует неэквивалентных способов раскраски?

2. Сколько перестановок с повторениями можно составить из букв «а» и «б», если эквивалентными считаются перестановки, получаемые друг из друга такими преобразованиями:

а) опусканием трех идущих подряд букв «а» или пяти идущих подряд букв «б».

б) включением в любом месте трех идущих подряд букв «а» или пяти букв «б»,

в) заменой «бббба» на «аб» и обратно.

3. Если перевернуть лист бумаги, на котором написаны цифры, то цифры, 0, 1 и 8 не изменятся, а 6 и 9 перейдут друг в друга. Остальные цифры потеряют смысл. Сколько существует десятизначных чисел, которые а) не меняются при этой операции, б) сохраняют смысл, в) перейдут в число, получаемое из данного обращением порядка цифр.

4. Модели многогранников делают из плоских разверток. В развертке грани прилегают друг к другу по ребрам, а модель строится путем загибания картонной развертки вдоль ребер. Таких различных разверток правильный тетраэдр имеет две. Сколько их имеет куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр?

5. Сколькими геометрически различными способами можно раскрасить правильный додекаэдр в 4 цвета, чтобы смежные грани имели разный цвет? Решите ту же задачу для куба и 3 цветов.

6. Сколькими геометрически различными способами можно раскрасить n красками окружность, разделенную на p равных частей?

7. Завод выпускает погремушки в виде кольца с надетыми на него p красными и q синими шариками. Сколько различных погремушек может быть выпущено (две погремушки считаются одинаковыми, если могут быть получены друг из друга передвижением шариков по кольцу или переворачиванием)?

8. Сколькими геометрически различными способами можно раскрасить грани куба двумя, тремя, четырьмя, пятью красками?

9. Сколькими геометрически различными способами можно раскрасить ребра куба двумя, ..., двенадцатью красками?

10. Сколькими геометрически различными способами можно раскрасить вершины куба тремя,..., восемью красками?

11. Решите аналогичные задачи для других правильных многогранников.

12. Грани куба раскрашиваются снаружи и изнутри двумя,..., шестью красками. Для каждого числа красок найдите число геометрически различных способов раскраски.

13. Решите аналогичную задачу, если снаружи куб раскрашивается одними красками, а изнутри — другими.

14. Решите аналогичную задачу для других правильных многогранников.

15. На правильном шестиугольнике построены две пирамиды одной и той же высоты (по разные стороны от него). Решите задачи о раскраске для получившейся двойной пирамиды.

16. Булевой функцией от n аргументов называют отображение множества кортежей длины n из цифр 0 и 1 в множество $\{0, 1\}$. Две булевы функции называются двойственными, если они переходят друг в друга при одновременной замене всех нулей на единицы, а единиц на нули (как в кортежах, так и в образах). Найдите число булевых функций от n аргументов, двойственных самим себе.

17. Найдите число симметричных булевых функций, т. е. функций, не меняющихся при перестановках цифр в кортежах.

18. Два n-значных натуральных числа называются эквивалентными, если получаются друг из друга перестановкой цифр. Найдите количество классов неэквивалентных n-значных чисел.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Наум Яковлевич Виленкин

Популярная комбинаторика

Утверждено к печати редколлегией серии
научно-популярных изданий Академии наук СССР

Редактор *А. З. Рывкин*, Художник *Е. И. Урусов*,
Художественный редактор *В. А. Чернецов*. Технический редактор *Ф. М. Хенох*
Корректоры *В. А. Бобров*, *М. С. Бочарова*

Сдано в набор 23/X 1974 г. Подписано к печати 11/II 1975 г. Формат $84\times108^1/_{32}$.
Бумага типографская № 2. Усл. печ. л. 10,92. Уч.-изд. л. 11,2
Тираж 100 000 2 завод (50 001—100 000). Т-02056. Тип. зак. 501 Цена 35 коп.

Отпечатано с матриц, изготовленных 2-й тип. издательства «Наука»
121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 10.

4-я типография издательства «Наука».
630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25

Издательство «Наука». 103717 ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., 21